LINEARE VEKTORRÄUME

LINEARE VEKTORRÄUME

BOSECK





H. BOSECK

H. BOSECK

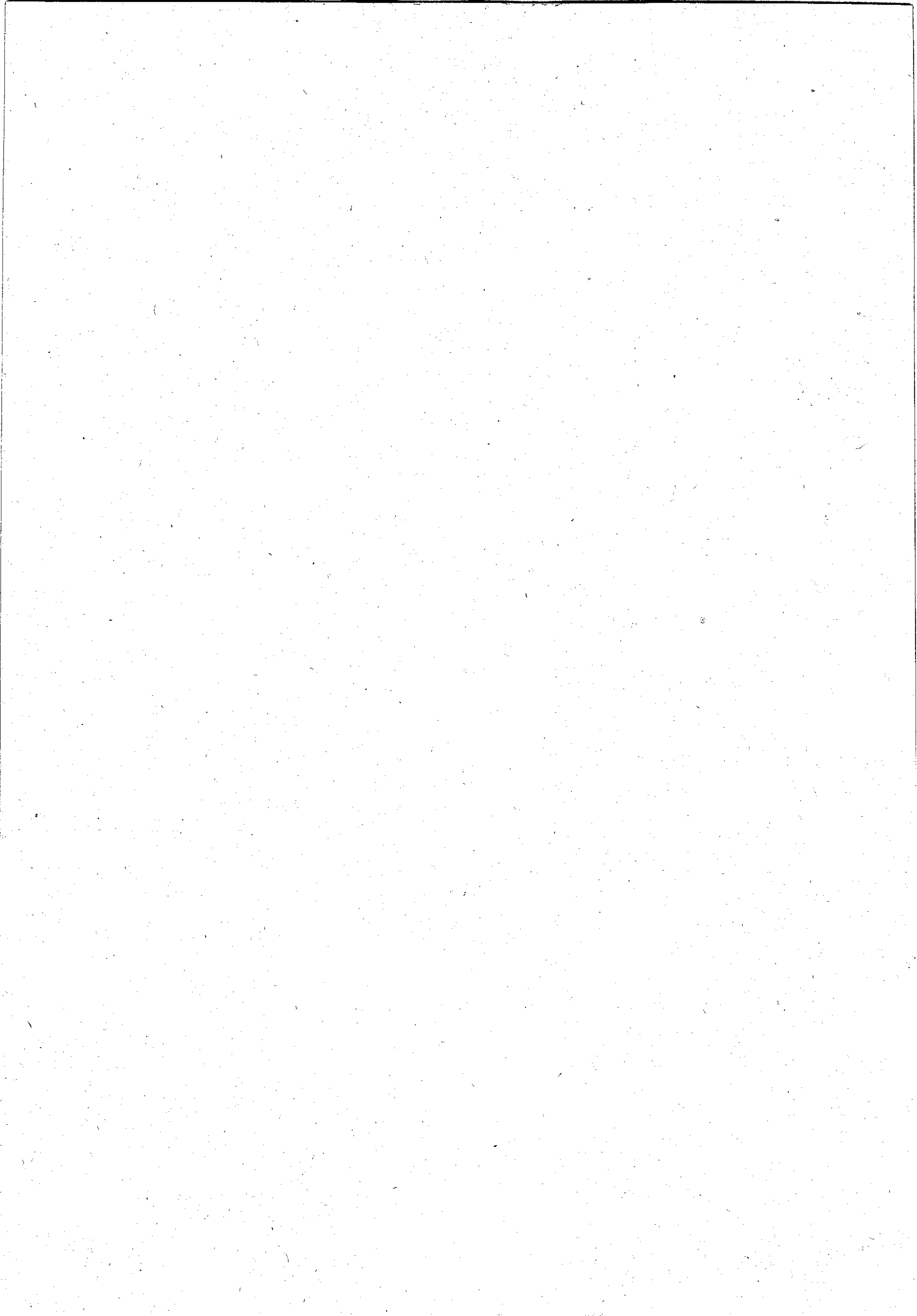
EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER LINEAREN VEKTORRÄUME



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

H. BOSECK

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER LINEAREN VEKTORRÄUME



HOCHSCHULBÜCHER FÜR MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON H. GRELL, K. MARUHN UND W. RINOW

BAND 60

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER LINEAREN VEKTORRÄUME

VON

H. BOSECK

MIT 14 ABBILDUNGEN

Fünfte Auflage



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

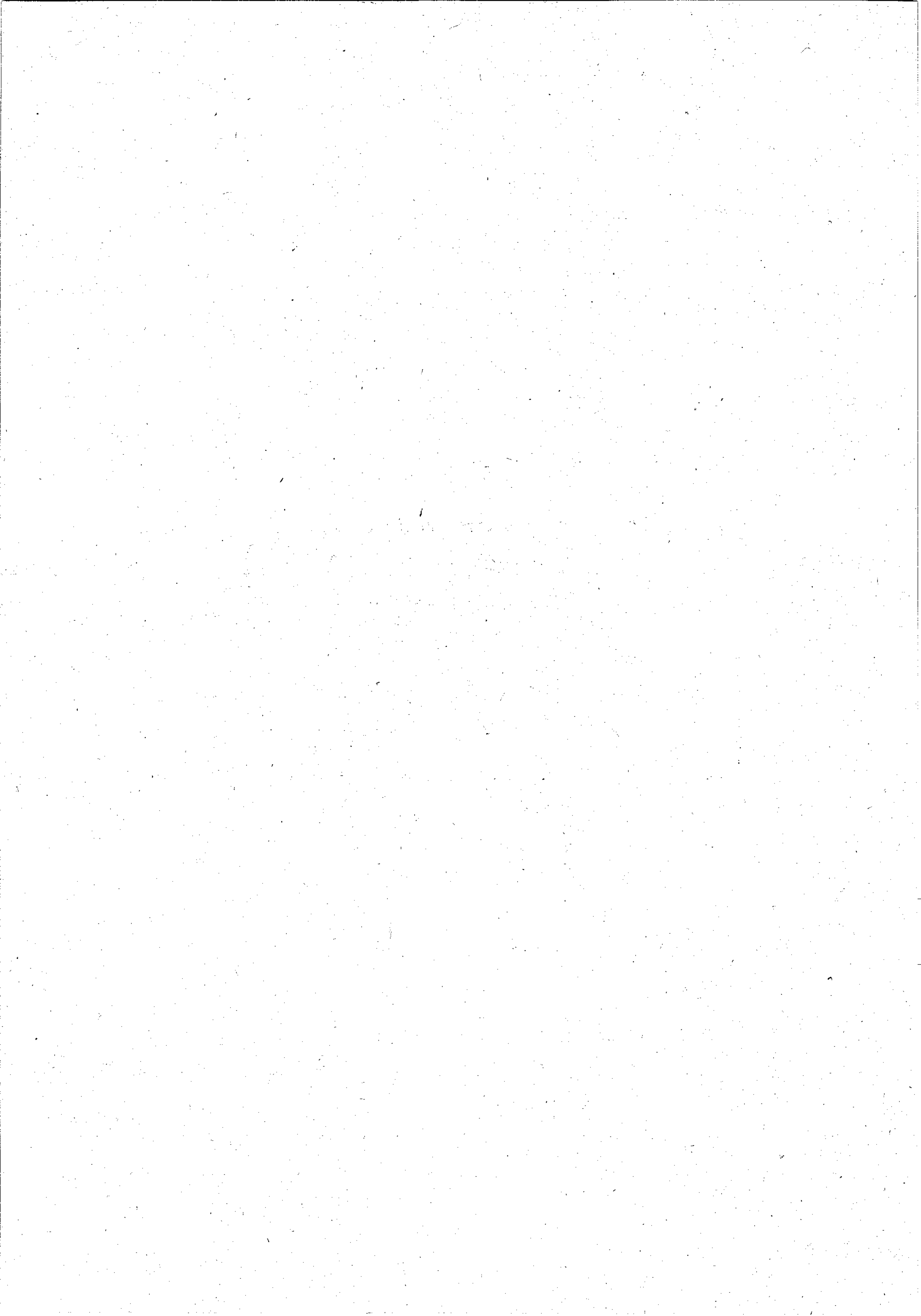
BERLIN 1984

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/54/84
Schutzumschlag: Hartwig Hoeftmann
Satz: VEB Leipziger Druckhaus III/18/203
Offsetdruck und buchbinderische Weiterverarbeitung:
Mühlhäuser Druckhaus, 5700 Mühlhausen
LSV 1024
Bestellnummer 569 454 4
DDR 32,– M

Dem Andenken meines verehrten Lehrers

H. L. SCHMID

in Dankbarkeit gewidmet



VORWORT

Die „Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume“ ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an den Universitäten Berlin und Greifswald gehalten hat. Die Abfassung des Textes wurde durch zwei einander teilweise widerstreitende Gesichtspunkte bestimmt: Die Darstellung sollte einerseits einem möglichst breiten Kreis von Studenten der Universitäten und technischen Hochschulen verständlich sein, andererseits der Verallgemeinerungsfähigkeit der dargestellten Methoden und Ergebnisse im Hinblick auf die Funktionalanalysis sowie ihre Anwendungen in der Physik in besonderer Weise Rechnung tragen. Inwieweit das Buch, ungeachtet der erforderlichen Kompromisse, die jeweils zugunsten des einen oder anderen Gesichtspunktes ausfallen mußten, der doppelten Zielsetzung gerecht wird, muß dem Urteil des Lesers überlassen bleiben.

Das vorliegende Buch wendet sich an Studenten der Mathematik und Physik, aber auch an Studenten der technischen Wissenschaften der Universitäten und technischen Hochschulen. Gerade in jüngster Zeit haben sich fundierte Kenntnisse über lineare Vektorräume, insbesondere über lineare Operatoren, Matrizen und lineare Funktionale, auch für die Studenten technischer Disziplinen als unabdingbare Grundlage erwiesen. Darüber hinaus besitzen sie große Bedeutung als mathematisches Ordnungsprinzip in der Mannigfaltigkeit konkreter Erscheinungen. Der Verfasser war bemüht, das Verständnis abstrakter Zusammenhänge durch vielfältige Beispiele, Motivierungen und geometrische Veranschaulichungen zu erleichtern. Ungeachtet dessen ist auch dieses Buch kein „Königsweg“ zum Verständnis der Theorie der linearen Vektorräume. Wie jedes Mathematikbuch sollte es vom Leser mit Papier und Bleistift und einem kritischen Blick gelesen werden.

Die Beispiele sind im allgemeinen so ausgewählt, daß sie den Blick auf weiterführende Verallgemeinerungen öffnen. Einige Beispiele sind dem Bereich der Differential- und Integralrechnung entnommen. Sie müssen evtl. von einem mit dieser Disziplin noch nicht vertrauten Leser zunächst überschlagen werden.

Der Verfasser hat versucht, die Notwendigkeit und Bedeutung verschiedener Begriffe zu motivieren. Diese Motivierungen beziehen sich zunächst vorwiegend auf den im Mathematik- und Physikunterricht der erweiterten polytechnischen Oberschule

vermittelten Stoff, dessen Beherrschung beim Leser vorausgesetzt wird, später werden auch die Ergebnisse der bereits entwickelten und dem Leser bekannten Teile der Theorie der linearen Vektorräume zur Motivierung neuer Begriffe herangezogen. Dennoch bleibt der Verfasser gezwungen, an den guten Glauben des Lesers über die Notwendigkeit und Bedeutung gewisser Begriffe zu appellieren. Betrachtet man die Mathematik als ein großes Gebäude, so müssen die Mauern im Erdgeschoß eine beträchtliche Breite und Tiefe aufweisen, um die zahlreichen und umfangreichen höheren Stockwerke tragen zu können. Die Notwendigkeit und vielleicht sogar Schönheit gewisser Stütz- und Strebpfeiler im Erdgeschoß läßt sich mitunter erst nach Kenntnis der oberen Stockwerke ermessen. Ähnliches gilt für die Anwendbarkeit der Ergebnisse der dargestellten Theorie, die nicht in allen Fällen so offensichtlich ist wie etwa bei den Fragen der Auflösung linearer Gleichungssysteme. Es ist ein hin und wieder geäußerter pragmatischer Standpunkt, daß die Ergebnisse der Mathematik direkt und unmittelbar in der objektiven Realität wie in anderen Wissenschaften Anwendung finden müssen. Die z. T. erstaunlichen Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik beruhen auf einer vielstufigen Abstraktion und dem deduktiven Aufbau mathematischer Theorien. Dadurch wird jedoch im allgemeinen auch ein mehrstufiger Weg zu den Anwendungen bedingt. So finden viele Sätze der hier dargestellten Theorie erst nach einer Reihe von Vertiefungen und Verallgemeinerungen, z. B. in der Funktionalanalysis, die verschiedenartigsten Anwendungen in Physik und Technik. Der ernsthaft an mathematischen Abstraktionen und ihren Anwendungen interessierte Anfänger — und dazu sollte auch jeder ökonomisch denkende Student technischer Disziplinen gehören — kann nicht genug davor gewarnt werden, die Zweckmäßigkeit seiner Studien nur nach der Beantwortung der Frage „Was nützt mir dies hier und heute?“ zu beurteilen. Er verschließt sich dadurch den Weg in die oberen Stockwerke der Mathematik, deren Anwendungen aus der Geschichte der modernen Naturwissenschaften nicht mehr wegzudenken sind.

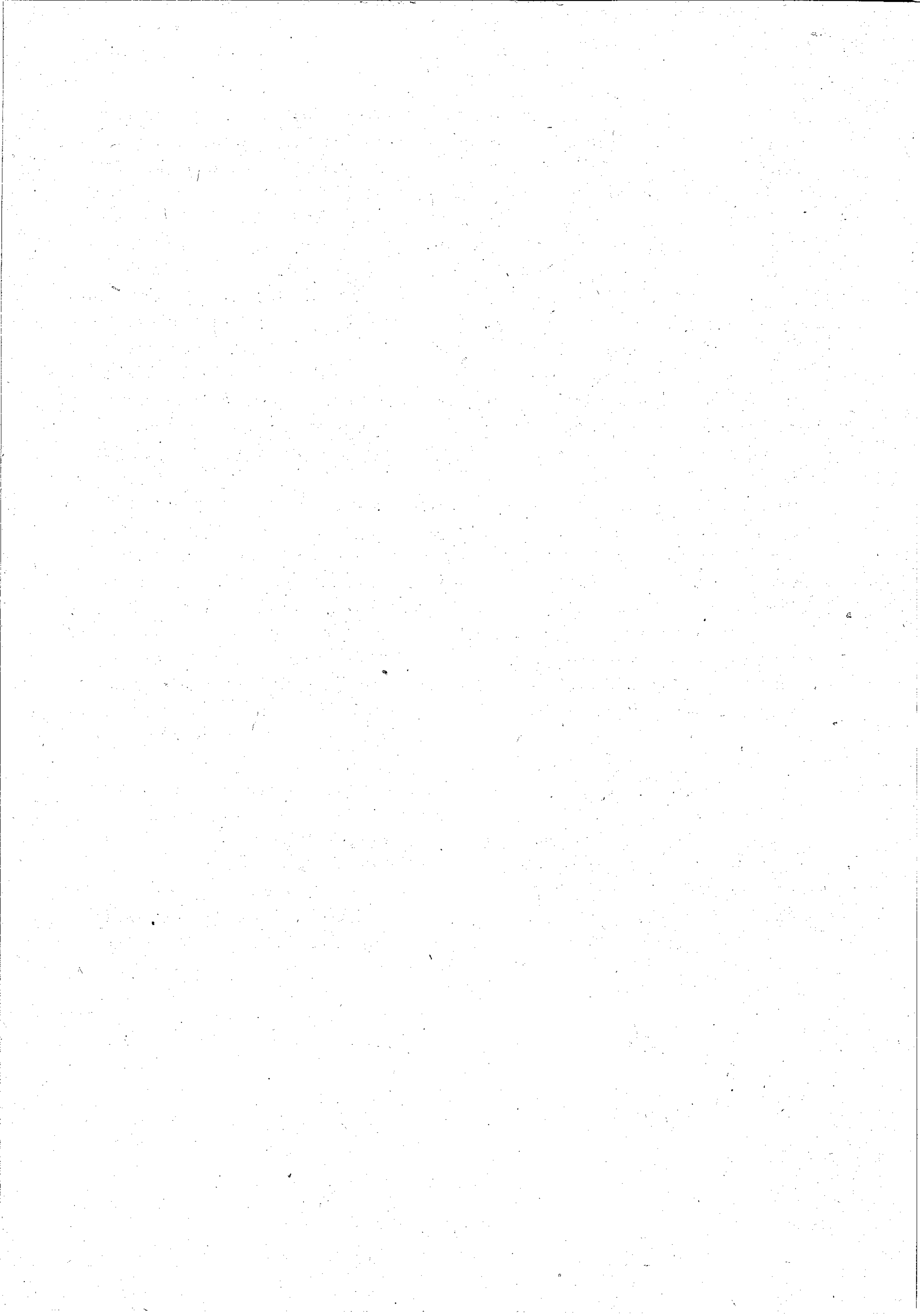
An einigen Stellen werden die Verhältnisse in linearen Vektorräumen durch geometrische Beziehungen in der Ebene und im Raum veranschaulicht. Es sei darauf hingewiesen, daß diese geometrischen Betrachtungen im Rahmen dieses Buches lediglich als Veranschaulichungen im direkten Sinne des Wortes gedacht sind und keinerlei Beweiskraft besitzen. Auf eine Darstellung der Zusammenhänge mit der Geometrie, insbesondere auf den Aufbau der analytischen Geometrie, wie er auf der Grundlage der Theorie der linearen Vektorräume üblich ist, wurde bewußt verzichtet. Dies konnte um so leichter geschehen, da geometrische Fragen in dem im gleichen Verlag erschienenen Buch von O.-H. KELLER, „Analytische Geometrie und lineare Algebra“, umfassend behandelt werden. Hier, wie sicher auch noch an anderen Stellen, ließ sich das vorwiegend algebraisch-analytische Interesse des Verfassers nicht unterdrücken.

Die Darstellung gliedert sich in drei Kapitel, deren jedes aus mehreren Paragraphen besteht. Die Paragraphen sind durchgehend numeriert. Jeder Paragraph ist in

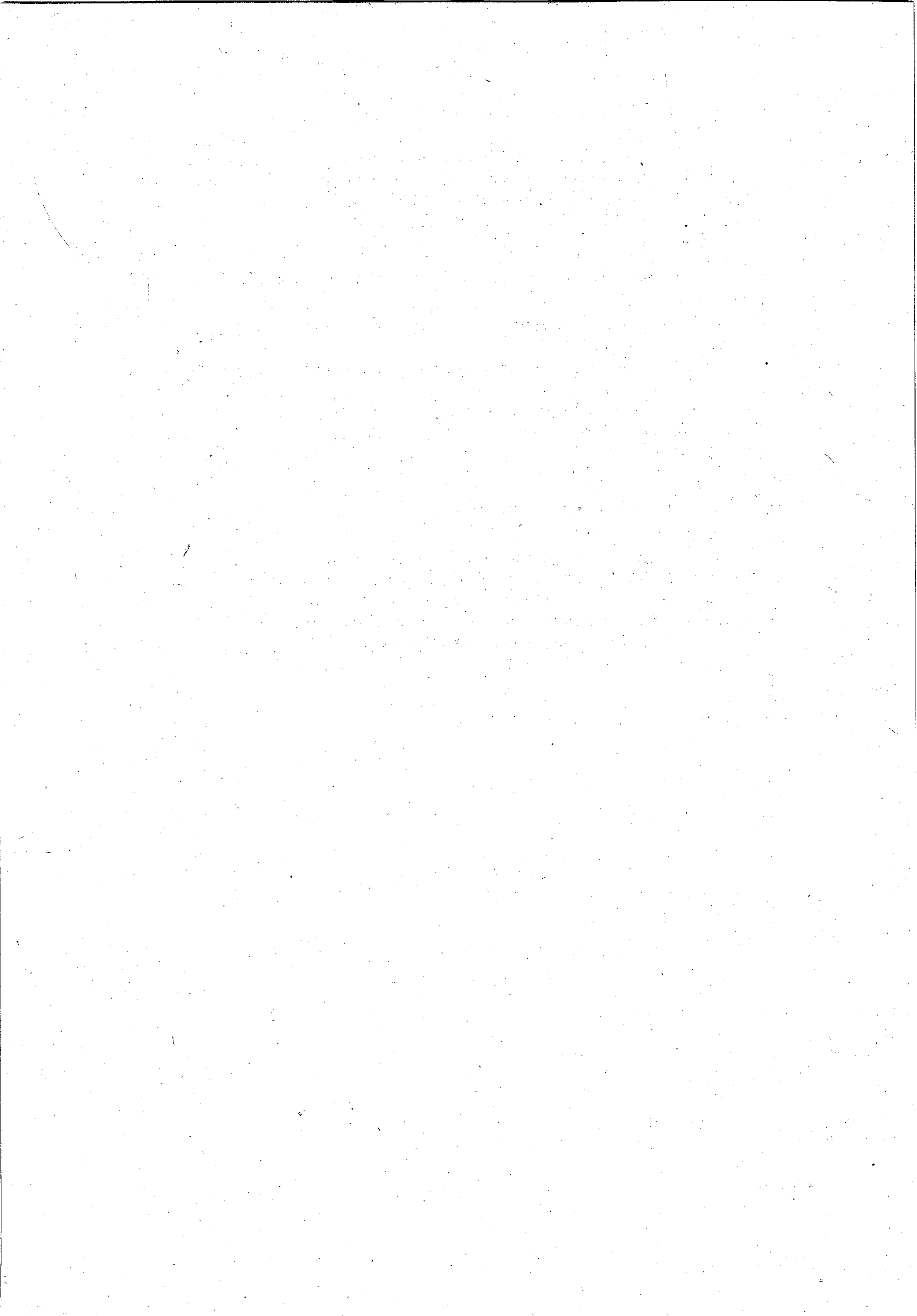
mehrere Abschnitte unterteilt, entsprechend den verschiedenen Fragestellungen, die in dem jeweiligen Paragraphen behandelt werden. Beispiele, Anwendungen und Veranschaulichungen sowie Überlegungen, die nicht zum unmittelbaren „Handlungsablauf“ gehören, sind durch Kleindruck abgesetzt. Darüber hinaus sind eine Reihe von Untersuchungen, die sich vorwiegend an einen mathematisch besonders interessierten Leser wenden, durch Sterne am Anfang * und Ende $_*$ gekennzeichnet. Die Sätze, Formeln und Beispiele sind, innerhalb der einzelnen Paragraphen mit I bzw. (1) und 1^0 beginnend, durchnumeriert. Bei Verweisen wird der Paragraph, der Abschnitt und der Satz bzw. die Formel oder das Beispiel angegeben. Am Schluß jedes Paragraphen sind einige Aufgaben formuliert. Sie sollen dem Leser Gelegenheit geben, das Verständnis der bisher entwickelten Sachverhalte zu überprüfen, dienen aber darüber hinaus der Vertiefung und Erweiterung der im Text gewonnenen Ergebnisse. Auch hier sind diejenigen Aufgaben, die sich an mathematisch besonders interessierte Leser wenden oder einen besonderen Schwierigkeitsgrad besitzen, durch einen Stern gekennzeichnet.

Zum Abschluß seien noch einige Werke genannt, die die in diesem Buch dargestellte Theorie in verschiedenen Richtungen verallgemeinern und dem Leser zur Erweiterung seiner Kenntnisse empfohlen werden. Es handelt sich um die ebenfalls im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften erschienenen Bücher „Matrizenrechnung I, II“ von F. R. Gantmacher, „Lineare Algebra und lineare Analysis“ von A. Lichnerowicz, „Normierte Algebren“ von M. A. Neumark, „Elementare Einführung in die Tensorrechnung“ von P. K. Raschewski, „Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung“ von H. Reichardt und „Vorlesungen über Funktionalanalysis“ von F. Riesz und B. Sz.-Nagy. Mit ihrer Hilfe wird es dem Leser gelingen, sich weiterführende Literatur in der ihn interessierenden Richtung zugänglich zu machen.

Für vielfältige nützliche Gespräche, Anregungen und Hinweise, den Gegenstand des Buches betreffend, dankt der Verfasser Herrn K. Matthes sowie Herrn H.-G. Bothe und Herrn K. Nawrotzki. Ihnen und Herrn J. Wisliceny ist er auch für ihre Hilfe bei der Korrektur verpflichtet. Der Dank des Verfassers gilt ferner seiner Frau für die sorgfältige Anfertigung des Manuskripts sowie dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften und dem VEB Leipziger Druckhaus für die gewohnt gediegene Ausstattung des Buches und das bereitwillige Eingehen auf alle Wünsche.



INHALTSVERZEICHNIS



I. LINEARE VEKTORRÄUME OHNE METRIK

§ 1. VEKTORRÄUME

1. EINLEITUNG

Der Begriff des Vektors ist dem Leser wohl zuerst im Physikunterricht der Schule begegnet, wo er zur Beschreibung von Kräften, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen verwandt wird. Die in einem Massenpunkt angreifende Kraft oder die Geschwindigkeit oder Beschleunigung eines Partikels wird dabei durch eine gerichtete Strecke repräsentiert, deren Richtung die Richtung der Kraftwirkung, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung angibt und deren Länge die Größe der Kraft, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung beschreibt. In der Schule wird darauf hingewiesen, daß man Kräfte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mit reellen Zahlen multiplizieren kann. Die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl bedeutet dabei lediglich eine entsprechende Vergrößerung der Kraft, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung ohne Änderung ihrer Richtung, während die Multiplikation mit einer negativen reellen Zahl zusätzlich die Umkehrung der Richtung in die entgegengesetzte beinhaltet. Als Ergebnis der „Multiplikation mit einer reellen Zahl" erhält man in jedem Fall wiederum eine Kraft, eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung.

Etwas schwieriger ist die „Addition" von Kräften, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen zu erklären, die nach dem sogenannten „Parallelogramm der Kräfte"[1]) vorgenommen wird und bei der sich sowohl die Größe der Kraft, der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung als auch ihre Richtung in Abhängigkeit von den „Summanden" ändert. Aber auch die Addition von Kräften, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen ergibt wiederum eine Kraft, eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung.

Mit dieser „Addition" und „Multiplikation mit einer reellen Zahl" kann man im Bereich der Kräfte, der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen wie gewohnt rechnen. In den Kräften, den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen liegen also drei Bereiche von physikalisch verschiedenen Objekten vor, die sich in bezug

---

[1]) Vgl. Abb. 2 auf S. 8.

auf das in ihnen erklärte Rechnen völlig gleich verhalten. Das Rechnen mit diesen verschiedenen physikalischen Objekten läßt sich durch das Rechnen mit geometrischen Vektoren, die durch gerichtete Strecken in der Ebene oder im Raum repräsentiert werden, zusammenfassen. In der Mathematik und ihren Anwendungen findet man aber noch viele andere Bereiche, deren Elemente sich ebenfalls addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren lassen, ohne daß das Rechnen in diesen Bereichen durch das Rechnen mit geometrischen Vektoren der Ebene oder des Raumes beschrieben werden kann, obwohl in allen Bereichen die gleichen Grundrechenregeln gelten. Als Beispiel seien hier nur einige Klassen reeller Funktionen, etwa die stetigen oder differenzierbaren reellen Funktionen, genannt.

Es erscheint demnach zweckmäßig, von gewissen, für das Rechnen unerheblichen Eigenschaften der betrachteten Objekte zu abstrahieren (in den obigen Überlegungen z. B. davon, daß es sich bei den betrachteten Objekten um Kräfte oder um geometrische Vektoren oder um reelle Funktionen handelt) und das Augenmerk auf die allen gemeinsamen Rechenoperationen zu konzentrieren. Durch diesen für die moderne Mathematik typischen Abstraktionsprozeß, der das einer großen Zahl in Mathematik und Physik auftretender konkreter Bereiche Gemeinsame zusammenfaßt, entsteht der wichtige und sehr allgemeine Begriff des linearen Vektorraumes, wie er im folgenden Abschnitt definiert wird. Seine Elemente, die Vektoren heißen, werden auf ihr Verhalten gegenüber den gewöhnlichen Grundrechenregeln und den daraus abgeleiteten Operationen untersucht. Die so entwickelte Theorie gilt dann für jeden der oben genannten und für noch viele weitere konkrete Bereiche der Mathematik und Physik. Die Ableitung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten braucht nicht mehr in jedem Bereich für sich und immer von neuem durchgeführt zu werden, sondern wird auf einen einmaligen Beweis in der Theorie der linearen Vektorräume reduziert. Die einmal abgeleiteten Methoden sind in einer Vielzahl verschiedenartiger mathematischer und physikalischer Bereiche anwendbar.

2. DER LINEARE VEKTORRAUM

Wir betrachten eine beliebige Menge und bezeichnen sie mit V. Die Art der Elemente dieser Menge, es kann sich dabei um Kräfte, Geschwindigkeiten, reelle Zahlen, reelle Funktionen oder andere Objekte handeln, ist für uns uninteressant. Wir wollen zunächst nur annehmen, daß die Menge V wenigstens ein Element enthält. Zur Bezeichnung der Elemente von V verwenden wir kleine lateinische Buchstaben vom Ende des Alphabets, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z, \ldots$, die auch häufig durch Indizes $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ unterschieden werden. Für die Aussage „$\boldsymbol{x}$ ist Element von V" bedienen wir uns der in der Mengenlehre üblichen Bezeichnung „$\boldsymbol{x} \in V$", wofür wir „$\boldsymbol{x}$ aus V" lesen. Werden mehrere Elemente $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ oder $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ der Menge V betrachtet, so bedeutet die Schreib-

weise $x, y, z \in V$ oder $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, daß alle angegebenen Elemente der Menge V angehören.

Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit R, ihre Elemente, die reellen Zahlen, mit kleinen griechischen Buchstaben vom Anfang des Alphabets, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Auch hier bedienen wir uns häufig der Unterscheidung durch Indizes und schreiben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Die Aussage „$\alpha$ ist eine reelle Zahl" werden wir durch „$\alpha \in R$" abkürzen, indem wir die aus der Mengenlehre entlehnte Bezeichnungsweise benutzen. Entsprechend bedeutet $\alpha, \beta, \gamma \in R$ oder $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$, daß α, β, γ bzw. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen sind.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir nun an, daß in der von uns betrachteten Menge V eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt ist. Das bedeutet: Je zwei Elementen $x, y \in V$ ist genau ein Element aus V zugeordnet, das wir mit $x + y$ bezeichnen und die „Summe der Elemente x und y" nennen; jeder reellen Zahl $\alpha \in R$ und jedem Element $x \in V$ ist genau ein Element aus V zugeordnet, das wir mit αx bezeichnen und das „Produkt der Zahl α mit dem Element x" nennen. Von einem linearen Vektorraum V sprechen wir, wenn für die in V erklärte „Addition" und „Multiplikation mit reellen Zahlen" die üblichen Rechengesetze gelten.

Wir wollen dies folgendermaßen präzisieren:

Ein *linearer Vektorraum* V ist eine Menge, die wenigstens ein Element enthält und in der eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt ist, so daß folgende Rechenregeln gelten:

1a) Für je drei Elemente $x, y, z \in V$ gilt
$(x + y) + z = x + (y + z)$ (assoziatives Gesetz der Addition);

1b) für je zwei Elemente $x, y \in V$ gilt
$x + y = y + x$ (kommutatives Gesetz der Addition);

1c) es gibt ein Element o in V, so daß für jedes $x \in V$ gilt:
$x + o = x$;

1d) zu jedem $x \in V$ gibt es ein Element $(-x)$ in V, so daß gilt:
$x + (-x) = o$;

2a) für je zwei Elemente $\alpha, \beta \in R$ und jedes $x \in V$ gilt
$\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$ (assoziatives Gesetz der Multiplikation);

2b) für jedes $x \in V$ gilt
$1x = x$;

3a) für jedes $\alpha \in R$ und je zwei Elemente $x, y \in V$ gilt
$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (erstes distributives Gesetz);

3b) für je zwei Elemente $\alpha, \beta \in R$ und jedes $x \in V$ gilt
$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ (zweites distributives Gesetz).

Die Elemente eines linearen Vektorraumes V heißen *Vektoren*. Der durch 1c) definierte Vektor o heißt *Nullvektor*, der durch 1d) definierte Vektor $(-x)$ heißt der *zum Vektor x negative Vektor*.[1])

3. BEISPIELE

Bevor wir uns der Untersuchung des Rechnens in linearen Vektorräumen zuwenden, betrachten wir einige Beispiele.

1⁰. Es sei $V = R$ die Menge der reellen Zahlen. Die Addition und Multiplikation der reellen Zahlen fassen wir als Addition der Elemente aus $V = R$ und als Multiplikation dieser Elemente mit reellen Zahlen auf. Dann gelten die Rechengesetze 1a)–3b)[2]), und wir können sagen:

Die reellen Zahlen bilden einen linearen Vektorraum R.

2⁰. Das Beispiel 1⁰ verallgemeinern wir dadurch, daß wir mehrere reelle Zahlen gleichzeitig betrachten. Zunächst nehmen wir die *Paare* von reellen Zahlen (α, β). Die Menge aller dieser Paare bezeichnen wir mit R^2. Entsprechend verstehen wir unter R^3 die Menge aller *Tripel* (α, β, γ) mit $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Diese Tripel schreiben wir auch in der Form $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. Allgemein sei R^n die Menge der *n-tupel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$.[3]) Wir wollen die Addition der reellen Zahlen sowie ihre Multiplikation in folgender Weise auf diese Bereiche übertragen. Dazu betrachten wir zunächst die Menge R^2 der Paare reeller Zahlen.

Ist $(\alpha, \beta) \in R^2$ und $(\gamma, \delta) \in R^2$, so definieren wir eine Addition durch

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha + \gamma, \beta + \delta).$$

Ist $\alpha \in R$ und $(\beta, \gamma) \in R^2$, so definieren wir die Multiplikation mit der reellen Zahl α durch

$$\alpha(\beta, \gamma) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \gamma).$$

Auf diese Weise ist in der Menge $V = R^2$ eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt. Für die Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in R^3$ definieren wir entsprechend

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

und

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \alpha \cdot \alpha_3) \quad (\alpha \in R).$$

Allgemein erklären wir für je zwei n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in R^n$ eine Summe durch

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

und ein Produkt mit reellen Zahlen durch

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n) \quad (\alpha \in R).$$

---

[1]) Vgl. S. 10 sowie Nr. 5, Satz IV und V auf S. 12.

[2]) Vgl. auch Nr. 6 auf S. 13.

[3]) Zwei Paare von reellen Zahlen (α, β), (γ, δ) sind nach Definition dann und nur dann gleich, wenn $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ ist. Entsprechend ist die Gleichheit für Tripel und allgemein n-tupel reeller Zahlen definiert: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ bedeutet $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$; schließlich bedeutet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, daß $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ ist.

Die so erklärte Addition in den Mengen R^2, R^3 oder allgemein R^n genügt dem assoziativen und dem kommutativen Gesetz, da die Addition der reellen Zahlen diese Eigenschaften hat. Das Paar (0, 0), das Tripel (0, 0, 0) und allgemein das n-tupel (0, 0, ..., 0) erfüllt die in 1c) angegebene Gleichung. Ist $(\alpha, \beta) \in R^2$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ bzw. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, so ist $(-\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ bzw. $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$ das zugehörige negative Paar, Tripel oder n-tupel, das der in 1d) genannten Gleichung genügt. Für die Multiplikation mit reellen Zahlen gelten die Rechengesetze 2a) und 2b), und die distributiven Gesetze sind ebenfalls erfüllt. Wir stellen fest:

Die Paare reeller Zahlen bilden einen linearen Vektorraum R^2.

Die Tripel reeller Zahlen bilden einen linearen Vektorraum R^3.

Die n-tupel reeller Zahlen bilden einen linearen Vektorraum R^n.

Es sei darauf hingewiesen, daß sich das Beispiel 1⁰ für $n = 1$ als Spezialfall dieses allgemeineren Beispiels erweist. Es ist $R = R^1$.

3⁰. Das Beispiel 2⁰ wollen wir weiter verallgemeinern, indem wir an Stelle der endlichen n-tupel die Menge aller *unendlichen Folgen* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots)$ von reellen Zahlen betrachten.[1]) Wir bezeichnen diese Menge mit R^∞. Die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einer reellen Zahl definieren wir entsprechend der Addition von n-tupeln und deren Multiplikation mit reellen Zahlen. Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots) \in R^\infty$, so sei

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_m + \beta_m, \ldots).$$

Ist $\alpha \in R$ und $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in R^\infty$, so setzen wir

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_m, \ldots).$$

Für diese Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen gelten die Rechengesetze 1a) und 1b), 2a) und 2b) sowie 3a) und 3b). Diejenige Folge, die nur aus Nullen besteht, genügt der in 1c) genannten Gleichung. Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in R^\infty$, so ist $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_m, \ldots) \in R^\infty$ das zugehörige negative Element.

Die unendlichen Folgen reeller Zahlen bilden einen linearen Vektorraum R^∞.

4⁰. Die Beispiele 2⁰ und 3⁰ lassen sich unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt betrachten und führen so zu einem wichtigen und sehr allgemeinen Beispiel für einen linearen Vektorraum.

Wir betrachten ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$. Dieses Tripel können wir als eine Funktion auffassen, die den Zahlen 1, 2, 3 die reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zuordnet. Es handelt sich um eine reellwertige Funktion mit dem Definitionsbereich der drei Elemente 1, 2, 3. Die Menge R^3 läßt sich als Menge aller reellwertigen Funktionen mit den Zahlen 1, 2, 3 als Definitionsbereich interpretieren. Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ ein n-tupel reeller Zahlen, so sehen wir es als eine Funktion an, die jeder ganzen Zahl i mit $1 \leqq i \leqq n$ die reelle Zahl α_i zuordnet. Die Menge R^n kann also als Menge aller reellwertigen Funktionen auf dem Definitionsbereich der n ganzen Zahlen 1, 2, ..., n aufgefaßt werden. Betrachten wir schließlich die Folge $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in R^\infty$ als eine Funktion, die jeder positiven ganzen Zahl i die reelle Zahl α_i zuordnet, so ist R^∞ die Menge aller reellwertigen Funktionen mit den ganzen positiven Zahlen als Definitionsbereich. Diese Überlegungen führen zur Definition des folgenden Vektorraumes.

---

[1]) Zwei unendliche Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ und $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$ sind nach Definition gleich, wenn ihre Elemente an den entsprechenden Stellen übereinstimmen: $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, \ldots$.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge. Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $a, b, c, \ldots$. Unter $R(\mathfrak{M})$ verstehen wir die Menge aller *reellwertigen Funktionen*, deren Definitionsbereich die Menge $\mathfrak{M}$ ist. Diese Funktionen bezeichnet man häufig auch als *eindeutige Abbildungen* der Menge $\mathfrak{M}$ in die Menge R der reellen Zahlen. Ist $\mathfrak{M}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen bzw. die Menge der positiven ganzen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind, so ist $R(\mathfrak{M})$ gleich R^∞ bzw. R^n, und wir erhalten die oben betrachteten Beispiele.

Ist $x \in R(\mathfrak{M})$, so ordnet x jedem $a \in \mathfrak{M}$ eine reelle Zahl α_a zu. In diesem Fall ist es üblich, „den Wert α_a der Funktion x an der Stelle a" mit $x(a)$ zu bezeichnen.[1])

Um zu einer geeigneten Definition für die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl zu gelangen, betrachten wir noch einmal die Beispiele 2° und 3°. Es sei $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$. In diesem Fall ist $\mathfrak{M}$ die Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, und für $1 \leqq i \leqq n$ gilt $x(i) = \alpha_i$. Ist nun $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, so ist $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$. Das Element $x + y$ wird also dadurch definiert, daß

$$(x + y)(i) = \alpha_i + \beta_i = x(i) + y(i) \quad \text{für jedes } i \text{ mit } 1 \leqq i \leqq n$$

gilt. Ist $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in R^\infty$, so ist $\mathfrak{M}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen, und für jede positive ganze Zahl i gilt $x(i) = \alpha_i$. Ist $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots) \in R^\infty$, so ist $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_m + \beta_m, \ldots)$, und es gilt

$$(x + y)(i) = \alpha_i + \beta_i = x(i) + y(i) \quad \text{für jede positive ganze Zahl } i.$$

In Verallgemeinerung dieser Gleichungen definieren wir eine Addition in der Menge $R(\mathfrak{M})$.

Sind $x, y \in R(\mathfrak{M})$, so verstehen wir unter $x + y$ diejenige reellwertige Funktion mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich, deren Wert $(x + y)(a)$ an jeder Stelle $a \in \mathfrak{M}$ gleich der Summe der Funktionswerte $x(a)$ und $y(a)$ an dieser Stelle ist:

$$(x + y)(a) \underset{\text{Def.}}{=} x(a) + y(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in \mathfrak{M}.$$

Für diese Addition gelten die Rechengesetze 1a) und 1b). Diejenige Funktion, deren Wert überall gleich Null ist, genügt der in 1c) angegebenen Gleichung. Wir bezeichnen sie mit o. Sie ist durch die Gleichung

$$o(a) \underset{\text{Def.}}{=} 0 \quad \text{für jedes} \quad a \in \mathfrak{M}$$

definiert. Ist ferner $x \in R(\mathfrak{M})$, so sei $(-x)$ diejenige Funktion, deren Wert an der Stelle a gleich $-x(a)$ ist. Diese Funktion ist durch

$$(-x)(a) \underset{\text{Def.}}{=} -x(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in \mathfrak{M}$$

definiert und genügt der in 1d) angegebenen Gleichung.

Um die Multiplikation mit einer reellen Zahl zu erklären, denken wir zunächst wieder an die Vektorräume R^n und R^∞. Ist $\alpha \in R$ und $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, so gilt $\alpha x = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n)$. Für jede ganze Zahl i mit $1 \leqq i \leqq n$ ist $(\alpha x)(i) = \alpha \cdot x(i)$. Entsprechend gilt für $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots) \in R^\infty$ die Gleichung $\alpha x = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_m, \ldots)$, und damit ist für jede positive ganze Zahl i der Wert $(\alpha x)(i)$ von αx an der Stelle i gleich $\alpha \cdot x(i)$: $(\alpha x)(i) = \alpha \cdot x(i)$. Dies veranlaßt uns zu der folgenden Definition der Multiplikation mit reellen Zahlen für Elemente aus $R(\mathfrak{M})$.

Ist $\alpha \in R$ und $x \in R(\mathfrak{M})$, so verstehen wir unter αx diejenige reellwertige Funktion mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich, deren Wert $(\alpha x)(a)$ an jeder Stelle $a \in \mathfrak{M}$ gleich dem Produkt der reellen Zahl α mit dem Wert $x(a)$ der Funktion x an dieser Stelle ist:

$$(\alpha x)(a) \underset{\text{Def.}}{=} \alpha \cdot x(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in \mathfrak{M}.$$

---

[1]) Zwei reellwertige Funktionen x und y auf der Menge $\mathfrak{M}$ sind dann und nur dann gleich, wenn $x(a) = y(a)$ für jedes $a \in \mathfrak{M}$ gilt.

Für diese Multiplikation mit reellen Zahlen gelten die Rechengesetze 2a) und 2b). Da die in $R(\mathfrak{M})$ erklärte Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen auch den distributiven Gesetzen 3a) und 3b) genügen, erhalten wir:

Die reellwertigen Funktionen mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich bilden einen linearen Vektorraum $R(\mathfrak{M})$.

5⁰.* Es sei $\mathfrak{M} = [\alpha_0, \beta_0]$ ein (abgeschlossenes) Intervall auf der reellen Zahlengeraden. Mit $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir die Menge der auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definierten und dort n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen. $D_0(\alpha_0, \beta_0)$ ist die Menge der stetigen reellen Funktionen auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$, wofür man häufig auch $C(\alpha_0, \beta_0)$ schreibt. In der Differentialrechnung wird bewiesen, daß die Summe zweier n-mal stetig differenzierbarer reeller Funktionen eine n-mal stetig differenzierbare reelle Funktion ist und daß das gleiche auch für jedes reelle Vielfache einer n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktion gilt. Die Funktionen $f + g$ und αf sind wiederum auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definiert, und folglich ist in jeder der Mengen $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt. Die „Nullfunktion", die jedem $\xi \in [\alpha_0, \beta_0]$ den Wert 0 zuordnet, ist n-mal stetig differenzierbar, und auch das Negative einer n-mal stetig differenzierbaren Funktion ist eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Man überzeugt sich leicht, daß die Addition der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen und die Multiplikation dieser Funktionen mit reellen Zahlen den Rechengesetzen 1a)–3b) genügen. Es gilt:

Die auf dem (abgeschlossenen) Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definierten und dort n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen bilden einen linearen Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$. *

6⁰. Es sei P die Menge aller Polynome in einer Unbestimmten t mit reellen Koeffizienten:

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m.$$

Die Addition zweier Polynome sei in der gewohnten Weise erklärt: Ist

$$q = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n$$

und etwa $m \leqq n$, so ist

$$p + q \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\, t + \cdots + (\alpha_m + \beta_m)\, t^m + \beta_{m+1} t^{m+1} + \cdots + \beta_n t^n.$$

Die Multiplikation mit der reellen Zahl α wird durch

$$\alpha p \underset{\text{Def.}}{=} \alpha \cdot \alpha_0 + \alpha \cdot \alpha_1 t + \cdots + \alpha \cdot \alpha_m t^m$$

definiert.

Die reelle Zahl 0 als Polynom nullten Grades genügt der in 1c) angegebenen Gleichung, und alle übrigen Rechengesetze der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen lassen sich ohne Mühe auf entsprechende Rechengesetze der reellen Koeffizienten zurückführen.

Die Polynome in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten bilden einen linearen Vektorraum P.

7⁰. Mit P_n bezeichnen wir die Menge aller Polynome in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten, deren Grad kleiner als n ist. Bei der im Beispiel 6⁰ genannten Addition von Polynomen ist der Grad des Polynoms $p + q$ stets kleiner oder gleich dem Grad des Polynoms p oder dem Grad des Polynoms q. Für $p \in P_n$ und $q \in P_n$ ist also $p + q \in P_n$. Der Grad des Polynoms αp ist für $\alpha \neq 0$ stets gleich dem Grad des Polynoms p, und es gilt $\alpha p \in P_n$, wenn $p \in P_n$ ist. Da für die Addition und die Multiplikation mit reellen Zahlen wiederum die Rechengesetze 1a)–3b) gelten, folgt:

Die Polynome in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten, deren Grad kleiner als n ist, bilden einen linearen Vektorraum P_n.

8⁰. Als letztes wollen wir ein Beispiel aus dem Bereich der Geometrie wählen und damit an die von der Schule her geläufigen Vorstellungen über Vektoren anknüpfen.

Es sei $\mathfrak{W}$ die Menge der Translationen (Parallelverschiebungen) der Ebene. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene, so ist eine Translation $\mathfrak{x} \in \mathfrak{W}$ durch den Bildpunkt Q, auf den P durch $\mathfrak{x}$ abgebildet wird, eindeutig bestimmt. Wir sagen: Die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ}$ „repräsentiert" die Translation $\mathfrak{x}$. Zwei gerichtete Strecken $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{P'Q'}$ repräsentieren genau dann die gleiche Translation $\mathfrak{x} \in \mathfrak{W}$, wenn diejenige Translation, die P in P' überführt, auch den Punkt Q auf den Punkt Q' abbildet (Abb. 1).

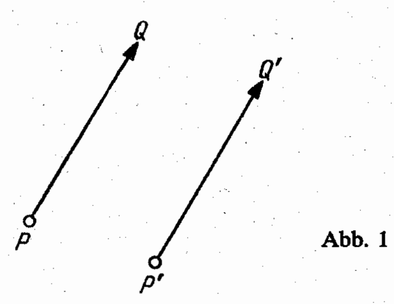


Abb. 1

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Translationen aus $\mathfrak{W}$, so verstehen wir unter $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ diejenige Translation, die man erhält, wenn man auf das Ergebnis der Translation $\mathfrak{x}$ die Translation $\mathfrak{y}$ anwendet. Geht der Punkt P bei der Translation $\mathfrak{x}$ in Q über und führt die Translation $\mathfrak{y}$ den Punkt Q in den Punkt Q' über, so wird die Translation $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ'}$ repräsentiert. Ist der Punkt P' das Bild von P bei der Translation $\mathfrak{y}$, so repräsentieren die Strecken $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{QQ'}$ die gleiche Translation, nämlich $\mathfrak{y}$, und folglich führt die Translation $\mathfrak{x}$, die P in Q abbildet, den Punkt P' in Q' über. Das so erhaltene Parallelogramm bedeutet, daß der Punkt P durch die Translationen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y} + \mathfrak{x}$ auf den gleichen Punkt Q' abgebildet wird. Da dies für jeden Punkt der Ebene gilt, genügt die Addition dem kommutativen Gesetz (Abb. 2). Entsprechend läßt sich das assoziative Gesetz der Addition nachweisen.

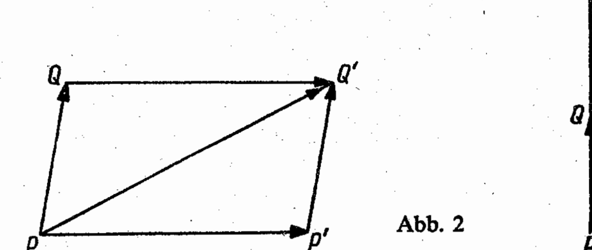


Abb. 2

Abb. 3

Bezeichnet $\mathfrak{o}$ diejenige „Translation", die jeden Punkt der Ebene fest läßt, so gilt für sie die Gleichung 1c). Ist ferner $(-\mathfrak{x})$ diejenige Translation, die die Translation $\mathfrak{x}$ rückgängig macht, so gilt 1d).

Mit $\alpha\mathfrak{x}$ bezeichnen wir die Translation, die jeden Punkt der Ebene um das α-fache der Translation $\mathfrak{x}$ verschiebt. Dabei wird die Richtung der Translation umgekehrt, wenn α eine negative Zahl ist.

Die Rechengesetze 2a) und 2b) sind einfach nachzuweisen, ebenso 3b). Wir beschränken uns auf die Betrachtung von 3a). Die Translationen $\mathfrak{x}$ und $\alpha\mathfrak{x}$ seien durch $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{PR}$ repräsentiert[1]), die

[1]) Wir beschränken uns hier auf den Fall einer positiven reellen Zahl α.

Strecke $\overrightarrow{PR''}$ repräsentiere die Translation $\alpha(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$. Dann repräsentieren $\overrightarrow{QQ'}$ und $\overrightarrow{RR'}$ die Translation $\mathfrak{y}$, und aus den Ähnlichkeitssätzen im Dreieck folgt, daß $\overrightarrow{RR''}$ das α-fache von $\overrightarrow{RR'}$ ist. Die Translationen $\alpha(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$ und $\alpha\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{y}$ bilden den Punkt P auf den gleichen Punkt R'' ab, und da P ein beliebiger Punkt der Ebene war, gilt das erste distributive Gesetz 3a) (Abb. 3).

Die Translationen der Ebene bilden einen linearen Vektorraum $\mathfrak{W}$.

4. DAS RECHNEN IN LINEAREN VEKTORRÄUMEN

In der einleitenden Nr. 1 haben wir darauf hingewiesen, daß wir uns, von der speziellen Eigenart der Objekte eines Vektorraumes absehend, mit dem Verhalten gegenüber den erklärten Rechenoperationen, der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen, beschäftigen werden. In diesem Abschnitt geben wir für lineare Vektorräume eine Reihe von Rechenregeln an, wie sie für das Rechnen mit Zahlen bekannt sind. Zunächst wollen wir die Addition induktiv von zwei auf beliebig (endlich) viele Summanden ausdehnen.

Es sei V ein linearer Vektorraum. Wir betrachten n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, und es sei $n \geqq 2$. Die Summe dieser n Vektoren definieren wir durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \underset{\text{Def.}}{=} (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n$$

unter der Induktionsannahme, daß die Summe von $n - 1$ Vektoren aus V bereits definiert sei. Zur Bezeichnung der linken Seite bedienen wir uns des Summenzeichens $\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ und erhalten die Definitionsgleichung in der Form

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^{n-1} x_j + x_n.$$

Für die Summe von n Vektoren eines linearen Vektorraumes gilt eine Verallgemeinerung des assoziativen und des kommutativen Gesetzes.

Das verallgemeinerte assoziative Gesetz besagt, daß man in einer Summe von endlich vielen Vektoren in beliebiger Weise Klammern setzen und weglassen darf, ohne den Wert der Summe zu ändern. Die Aussage des verallgemeinerten kommutativen Gesetzes besteht darin, daß man in einer Summe von endlich vielen Vektoren die Reihenfolge der Summanden beliebig verändern darf, ohne daß sich der Wert der Summe ändert. Entsprechend läßt sich das assoziative Gesetz der Multiplikation dahingehend verallgemeinern, daß man in einem Produkt aus endlich vielen reellen Zahlen und einem Vektor x nach Belieben Klammern setzen und weglassen darf, ohne daß sich der Wert des Produktes ändert.

Die beiden distributiven Gesetze lassen sich zu der folgenden Rechenregel erweitern:

Sind $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R$, so gilt

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n)\\
&= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_1\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_1\boldsymbol{x}_n\\
&\quad + \alpha_2\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_2\boldsymbol{x}_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \alpha_m\boldsymbol{x}_1 + \alpha_m\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_n\\
&= \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_1\\
&\quad + \alpha_1\boldsymbol{x}_2 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \alpha_1\boldsymbol{x}_n + \alpha_2\boldsymbol{x}_n + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_n.
\end{aligned}$$

Benutzen wir das Summenzeichen, so erhält diese Gleichung folgende einfache Form:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{x}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_j.$$

In einem linearen Vektorraum V gibt es nur einen Nullvektor $\boldsymbol{o}$, und zu jedem Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ gibt es nur einen negativen Vektor $(-\boldsymbol{x}) \in V$. Für diese Vektoren gelten folgende Gleichungen:

$$0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad \text{und} \quad (-1)\,\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{x}) \quad \text{für jedes } \boldsymbol{x} \in V.$$

Wir schreiben $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$ und bemerken, daß $\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}$ und $(\alpha - \beta)\,\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{x}$ ist.

5.* AXIOMATISCHE BEWEISE DER RECHENREGELN

Die in Nr. 4 angegebenen Verallgemeinerungen der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze sowie die Sätze über die Einzigkeit des Nullvektors und des zu einem Vektor negativen Vektors lassen sich aus den Rechengesetzen 1 a)–3 b) wie folgt ableiten. Ein vornehmlich an den Anwendungen interessierter Leser kann diesen und den folgenden Abschnitt zunächst überschlagen.

Durch einen Induktionsschluß folgern wir aus dem assoziativen Gesetz der Addition das *verallgemeinerte assoziative Gesetz.*

I. *Sind n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus V und m ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ mit der Eigenschaft $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqq n$ gegeben und setzen wir*

$$y_1 = x_1 + \cdots + x_{k_2-1},\ y_2 = x_{k_2} + \cdots + x_{k_3-1},\ \ldots,\ y_m = x_{k_m} + \cdots + x_n,$$

so gilt die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m.$$

Benutzt man das Summenzeichen, so ist

$$y_i = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k_{m+1} = n + 1),$$

und die Behauptung lautet

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i .$$

Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Es sei $n > 1$, und die Behauptung sei bereits für $n - 1$ Vektoren aus V bewiesen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $k_m = n$. Dann ist $y_m = x_n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}$. Durch Addition von x_n erhalten wir

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n = (y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}) + x_n$$

und daraus auf Grund der Definitionsgleichung für eine Summe aus n Vektoren die Behauptung.

2. Fall: $k_m < n$. In diesem Fall setzen wir $y'_m = x_{k_m} + \cdots + x_{n-1}$. Dann ist $y_m = y'_m + x_n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1} + y'_m$. Wir berücksichtigen, daß $y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1} + y'_m = (y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}) + y'_m$ ist und addieren in der obigen Gleichung x_n. Dann gilt

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n = ((y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}) + y'_m) + x_n .$$

Auf die rechte Seite dieser Gleichung wenden wir das assoziative Gesetz der Addition 1a) an und erhalten

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n = (y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}) + (y'_m + x_n).$$

Da $y'_m + x_n = y_m$ ist, folgt die Behauptung wie im ersten Fall.

Für eine genaue Formulierung des verallgemeinerten kommutativen Gesetzes benötigen wir den Begriff der Permutation. Unter einer *Permutation* der Zahlen 1, 2, ..., n verstehen wir eine eindeutige Abbildung π der Zahlen 1, 2, ..., n auf sich. Die Folge $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ der Bilder der Zahlen 1, 2, ..., n besteht wiederum aus diesen Zahlen, wobei die Reihenfolge aber im allgemeinen eine andere ist. Das *verallgemeinerte kommutative Gesetz* können wir dann so aussprechen:

II. *Sind n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus V gegeben und ist π eine Permutation der Zahlen* 1, 2, ..., n, *so gilt*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \cdots + x_{\pi(n)} .$$

Den Induktionsbeweis überlassen wir dem interessierten Leser als Übung. Der Leser überlege sich ferner die Formulierung des verallgemeinerten assoziativen Gesetzes der Multiplikation mit reellen Zahlen nach dem Beispiel von Satz I und beweise dieses Gesetz.

Die in der Definition des linearen Vektorraumes unter 3a) und 3b) genannten distributiven Gesetze werden zu der folgenden wichtigen Regel für das Rechnen mit Summenzeichen verallgemeinert:

III. *Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Vektoren aus V und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R$, so gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_j . \tag{1}$$

Zum Beweis verallgemeinern wir die beiden distributiven Gesetze 3a) und 3b) durch vollständige Induktion und zeigen: *Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Vektoren aus V und ist $\alpha \in R$, so gilt*

$$\alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha x_j = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n . \tag{2}$$

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ reelle Zahlen und ist $x \in V$, so gilt

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)\, x = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) x = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_m x. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) stimmt für $n = 2$ mit 3a) überein. Es sei nun $n > 2$, und wir nehmen an, daß die Gleichung (2) für $n - 1$ Summanden gilt. Dann ist

$$\alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \alpha((x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_n) = \alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + \alpha x_n.$$

Hieraus und aus der Induktionsvoraussetzung $\alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_{n-1}$ folgt die Gleichung (2).

Die Gleichung (3) stimmt für $m = 2$ mit 3b) überein. Es sei $m > 2$, und wir nehmen an, daß die Gleichung (3) für $m - 1$ Summanden gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)\, x &= ((\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1}) + \alpha_m)\, x \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1})\, x + \alpha_m x.\end{aligned}$$

Hieraus und aus der Induktionsvoraussetzung $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1})\, x = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_{m-1} x$ folgt die Gleichung (3).

Betrachten wir nun das Produkt $\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$, so gilt nach (3)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) \sum_{j=1}^{n} x_j = \alpha_1 \sum_{j=1}^{n} x_j + \alpha_2 \sum_{j=1}^{n} x_j + \cdots + \alpha_m \sum_{j=1}^{n} x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_j\right).\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Gleichung (2), so ist $\alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_j = \alpha_i x_1 + \alpha_i x_2 + \cdots + \alpha_i x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j$ und damit

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j.$$

Die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_j$$

folgt schließlich aus dem verallgemeinerten kommutativen Gesetz.

Wir beweisen nun die Einzigkeit des Nullvektors.

IV. *In einem linearen Vektorraum gibt es genau einen Nullvektor.*

Das Gesetz 1c) besagt, daß ein Nullvektor existiert. Es seien jetzt o und o' Nullvektoren in V. Dann gelten für alle $x \in V$ die Gleichungen $x + o = x$ und $x + o' = x$. Setzen wir in der ersten Gleichung $x = o'$ und in der zweiten $x = o$, so erhalten wir $o' + o = o'$ und $o + o' = o$. Es ist also $o' = o$.

Ein entsprechender Satz gilt für das negative Element.

V. *In einem linearen Vektorraum V gibt es zu jedem Vektor x genau einen negativen Vektor $(-x)$.*

Das Gesetz 1d) besagt die Existenz eines negativen Vektors. Es seien jetzt $(-x)$ und $(-x)'$ negative Vektoren zum Vektor x. Dann ist $x + (-x)' = o$, und wenn wir den Vektor $(-x)$ addieren, erhalten wir $(-x) + (x + (-x)') = (-x)$. Nach dem assoziativen Gesetz der Addition folgt aus dieser Gleichung $((-x) + x) + (-x)' = (-x)$, und da $(-x) + x = o$ ist, ergibt sich $(-x)' = (-x)$.

VI. *In einem linearen Vektorraum V gelten die Gleichungen*

$$0x = o \quad \textit{und} \quad (-1)\, x = (-x) \quad \textit{für jedes } x \in V.$$

Es seien x und y zwei beliebige Vektoren aus V. Wir setzen $z = (-x) + y$, dann ist $y = z + x$, und es gilt $y + 0x = (z + x) + 0x = z + (1x + 0x) = z + (1 + 0)\,x = y$. Das Element $0x$ ist also ein Nullvektor in V, und nach Satz IV ist $0x = o$. Ferner gilt $x + (-1)\,x = (1 + (-1))\,x = 0x = o$, und daraus folgt, daß $(-1)\,x$ ein negatives Element zu x ist. Nach Satz V gilt $(-1)\,x = (-x)$.*

6.* VEKTORRÄUME ÜBER BELIEBIGEN KÖRPERN

Für den an der Axiomatik der linearen Vektorräume interessierten Leser wollen wir die bekannten Rechengesetze der reellen Zahlen zusammenstellen, auf die wir in unseren Überlegungen Bezug genommen haben.

In der Menge R der reellen Zahlen ist eine Addition und eine Multiplikation derart erklärt, daß die Summe und das Produkt zweier reeller Zahlen wieder reelle Zahlen sind. Für die Addition und die Multiplikation der reellen Zahlen gelten folgende Rechengesetze:

1α) Für je drei reelle Zahlen α, β, γ gilt

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (assoziatives Gesetz der Addition);

1β) für je zwei reelle Zahlen α, β gilt

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (kommutatives Gesetz der Addition);

1γ) es gibt eine reelle Zahl 0, so daß für jede reelle Zahl α

$\alpha + 0 = \alpha$

ist;

1δ) zu jeder reellen Zahl α gibt es eine reelle Zahl $(-\alpha)$ mit

$\alpha + (-\alpha) = 0$;

2α) für je drei reelle Zahlen α, β, γ gilt

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (assoziatives Gesetz der Multiplikation);

2β) für je zwei reelle Zahlen α, β gilt

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (kommutatives Gesetz der Multiplikation);

2γ) es gibt eine reelle Zahl 1, so daß für jede reelle Zahl α

$\alpha \cdot 1 = \alpha$

gilt;

2δ) zu jeder reellen Zahl $\alpha \neq 0$ gibt es eine reelle Zahl α^{-1} mit

$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$;

3) für je drei reelle Zahlen α, β, γ gilt

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (distributives Gesetz).

Ist in einer Menge K von beliebigen Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine Addition und eine Multiplikation derart erklärt, daß Summe und Produkt zweier Elemente aus K wiederum Elemente aus K sind, und genügt diese Addition und Multiplikation den Rechengesetzen 1α)–3), wobei überall die Worte „reelle Zahl" durch „Element aus K" zu ersetzen sind, so nennt man die Menge K einen *Körper*.

Die oben angegebenen Eigenschaften des Rechnens mit den reellen Zahlen können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen.

VII. *Die reellen Zahlen bilden einen Körper.*

Als ein weiteres Beispiel für einen Körper nennen wir die komplexen Zahlen.

In den §§ 1–13 werden nur die genannten Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen in unsere Betrachtungen über lineare Vektorräume eingehen.

Wir weisen den Leser auf die folgende Verallgemeinerung der hier dargestellten Theorie hin. Betrachtet man einen beliebigen Körper K und ersetzt in der in Nr. 2 angegebenen Definition eines linearen Vektorraumes die Worte „reelle Zahl" durch „Element von K" und das Zeichen „$\alpha \in R$" durch „$\alpha \in K$", so erhält man die Definition eines *Vektorraumes über dem Körper K*. Da die in den §§ 1–13 entwickelte Theorie der linearen Vektorräume lediglich auf den Rechengesetzen 1a)–3b) sowie 1α)–3) beruht, gelten alle Überlegungen und Sätze dieser Paragraphen auch für den Fall eines Vektorraumes über einem beliebigen Körper K. Eine Ausnahme bilden lediglich einige Beispiele (vgl. etwa § 1, Nr. 3, Beispiel 5^0), in denen Begriffe der reellen Analysis, wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw., eine Rolle spielen. Erst in § 14, Nr. 3 und in den folgenden Paragraphen werden auch in der allgemeinen Theorie Eigenschaften der reellen Zahlen herangezogen, die über die oben genannten Rechengesetze hinausgehen und die Anordnung der reellen Zahlen betreffen. Die Ergebnisse dieser Paragraphen gelten dann nicht mehr für Vektorräume über einem beliebigen Körper K.*

7. AUFGABEN

1. Man zeige, daß die Menge Ω der komplexen Zahlen einen linearen Vektorraum bildet.

2. Für die Beispiele 2^0–4^0 weise man die Rechengesetze 1a)–3b) nach.

3. In Analogie zum Beispiel 8^0 überlege man sich, daß die Translationen des Raumes einen linearen Vektorraum bilden.

4.* Man beweise das verallgemeinerte kommutative Gesetz der Addition sowie das verallgemeinerte assoziative Gesetz der Multiplikation mit reellen Zahlen durch vollständige Induktion.

5.* Man beweise die Gleichungen $(-(-x)) = x$, $(-\alpha)x = \alpha(-x) = (-\alpha x)$, $\alpha o = o$ und $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ sowie $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

§ 2. TEILRÄUME

1. EINLEITUNG

In der Theorie der linearen Vektorräume hat man häufig mit Teilmengen eines linearen Vektorraumes zu tun, die selbst einen linearen Vektorraum bilden. Ist z. B. ein System von Kräften gegeben, die an einem Massenpunkt angreifen und die alle in einer Ebene liegen, so ist es offenbar unzweckmäßig, diese Kräfte als Vektoren im Raum aufzufassen. Man wird sich vielmehr auf die Betrachtung dieser Kräfte in der Ebene beschränken, sie also als ebene Vektoren auffassen, was die Untersuchungen vereinfacht. Werden allgemein gewisse Vektoren eines linearen Vektorraumes untersucht, so wird man häufig geneigt sein, sie als Elemente einer möglichst kleinen Teilmenge des gegebenen Vektorraumes aufzufassen, wobei man diese Teilmenge so wählen muß, daß sie selbst wiederum ein linearer Vektorraum ist, wenn man die allgemeine Theorie der linearen Vektorräume auf den betrachteten Fall anwenden will.

Untersucht man, um ein anderes Beispiel zu nennen, gewisse differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ der reellen Geraden, so wird man diese Funktionen im allgemeinen nicht so sehr als Elemente des Vektorraumes $C(\alpha_0, \beta_0) = D_0(\alpha_0, \beta_0)$ der auf diesem Intervall stetigen Funktionen, sondern als Elemente des „kleineren" Vektorraumes $D_1(\alpha_0, \beta_0)$ der auf dem genannten Intervall differenzierbaren Funktionen betrachten. Da jede differenzierbare Funktion stetig ist, ist $D_1(\alpha_0, \beta_0)$ offenbar eine Teilmenge des Vektorraumes $D_0(\alpha_0, \beta_0)$, die selbst ein linearer Vektorraum ist.

Diese Überlegungen führen zum Begriff des linearen Teilraumes eines linearen Vektorraumes, wie er in Nr. 2 definiert wird.

2. LINEARE TEILRÄUME; EIN KRITERIUM

Eine Teilmenge W eines linearen Vektorraumes V nennt man einen *linearen Teilraum* von V, wenn sie selbst ein linearer Vektorraum ist, wobei die Addition und die Multiplikation mit reellen Zahlen in W mit der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen in V übereinstimmen. Daraus folgt, daß ein Teilraum W mit zwei Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ auch deren Summe $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ und mit einem Vektor $\boldsymbol{x}$ auch jedes reelle Vielfache $\alpha\boldsymbol{x}$ dieses Vektors enthält. Es ist wichtig, daß sich ein linearer Teilraum durch diese Eigenschaften charakterisieren läßt. Wir beweisen das folgende

Kriterium. *Eine nicht leere*[1]) *Teilmenge W eines linearen Vektorraumes V ist genau dann ein linearer Teilraum von V, wenn mit je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ auch die Summe $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ zu W gehört und jedes reelle Vielfache $\alpha\boldsymbol{x}$ eines Vektors $\boldsymbol{x} \in W$ wiederum ein Vektor aus W ist.*

Auf die Notwendigkeit der genannten Bedingung haben wir bereits hingewiesen, wir brauchen nur zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist. Dazu müssen wir die Rechengesetze 1a)–3b) aus § 1, Nr. 2 nachprüfen. Da jedes Element $\boldsymbol{x} \in W$ ein Vektor des größeren Vektorraumes V ist und da die Addition und die Multiplikation mit reellen Zahlen für die Elemente von W mit der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen für die Vektoren aus V übereinstimmen, gelten die Gesetze 1a) und 1b) sowie 2a)–3b) für die Addition und die Multiplikation mit reellen Zahlen in W. Zum Nachweis von 1c) und 1d) sei $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Vektor aus W. Nach Voraussetzung ist $\alpha\boldsymbol{x}$ für jede reelle Zahl α ein Vektor aus W, und insbesondere gilt $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in W$ sowie $(-1)\,\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{x}) \in W$. Damit ist das Kriterium bewiesen.

3. BEISPIELE

Den Begriff des linearen Teilraumes erläutern wir an einigen Beispielen. Wir benutzen das bewiesene Kriterium, um den Leser mit dessen Anwendung vertraut zu machen.

1°. Es sei $V = R^2$ der Vektorraum aller Paare von reellen Zahlen. Die Menge W bestehe aus allen Paaren $(\alpha, 0)$, für die an der zweiten Stelle die reelle Zahl 0 steht. Sind $(\alpha, 0), (\beta, 0) \in W$, so gilt

---

[1]) Das bedeutet, daß die Teilmenge W wenigstens einen Vektor aus V enthält.

$(\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha + \beta, 0)$, und das bedeutet, daß die Summe zweier Vektoren aus W wieder zu W gehört. Ist $\alpha \in R$ und $(\beta, 0) \in W$, so ist $\alpha(\beta, 0) = (\alpha \cdot \beta, 0)$, und das Produkt eines Vektors aus W mit einer reellen Zahl liegt wieder in W. Nach dem in Nr. 2 bewiesenen Kriterium ist W ein linearer Teilraum des Vektorraumes R^2.

Entsprechend zeigt man, daß die Menge aller Paare der Form $(0, \alpha)$, für die an der ersten Stelle die reelle Zahl 0 steht, ein linearer Teilraum von R^2 ist.

Diese Betrachtungen lassen sich auf den Vektorraum R^n der n-tupel reeller Zahlen verallgemeinern. Dazu betrachten wir m ganze Zahlen, die zwischen 1 und n liegen: $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqq n$. Es sei W die Menge aller n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, für die $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \cdots = \alpha_{k_m} = 0$ ist. W besteht also aus allen n-tupeln, für die an den festgelegten Stellen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ die reelle Zahl 0 steht. Fassen wir das n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = x$ als reellwertige Funktion mit dem Definitionsbereich $1, 2, \ldots, n$ auf, so besteht W aus allen reellwertigen Funktionen, die an den Stellen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ verschwinden. Für die Addition gilt

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

und wenn $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in W$ ist, so bedeutet dies, daß $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \cdots = \alpha_{k_m} = 0$ und $\beta_{k_1} = \beta_{k_2} = \cdots = \beta_{k_m} = 0$ ist. Dann ist aber auch $\alpha_{k_1} + \beta_{k_1} = \alpha_{k_2} + \beta_{k_2} = \cdots = \alpha_{k_m} + \beta_{k_m} = 0$, und die Summe der betrachteten n-tupel ist ein n-tupel, für das an den Stellen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ die reelle Zahl 0 steht und das damit der Menge W angehört. Für die Multiplikation mit einem $\alpha \in R$ gilt

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n),$$

und aus $\alpha_{k_1} = \alpha_{k_2} = \cdots = \alpha_{k_m} = 0$ folgt $\alpha \cdot \alpha_{k_1} = \alpha \cdot \alpha_{k_2} = \cdots = \alpha \cdot \alpha_{k_m} = 0$, so daß mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ auch das Produkt $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ zu W gehört. Die Menge W ist ein linearer Teilraum des Vektorraumes R^n.

Beachten wir die oben schon erwähnte Auffassung der Elemente von R^n als reellwertige Funktionen, so ergibt sich folgende Verallgemeinerung unserer Betrachtungen auf den Fall des linearen Vektorraumes $R(\mathfrak{M})$.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine gegebene Menge und $\mathfrak{M}_1$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Mit $W = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ bezeichnen wir die Menge derjenigen reellwertigen Funktionen mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich, die für alle Elemente aus $\mathfrak{M}_1$ den Wert Null annehmen. Zunächst ist $W = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ eine Teilmenge des Vektorraumes $R(\mathfrak{M})$. Sind $x, y \in R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, so gilt für jedes $a \in \mathfrak{M}_1$ die Gleichung $x(a) = y(a) = 0$. Dann ist aber auch $(x + y)(a) = x(a) + y(a) = 0$ für jedes $a \in \mathfrak{M}_1$ und folglich $x + y \in R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$. Ebenso gilt für jedes $\alpha \in R$ und $a \in \mathfrak{M}_1$ die Gleichung $(\alpha x)(a) = \alpha \cdot (x(a)) = 0$, falls $x \in R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, d. h. $x(a) = 0$ für jedes $a \in \mathfrak{M}_1$, ist. Damit ist $\alpha x \in R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, und *$W = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ ist ein linearer Teilraum des Vektorraumes $R(\mathfrak{M})$.*

2°. Es sei wiederum $V = R^2$ der Vektorraum der Paare reeller Zahlen, und es seien $\alpha_0, \beta_0 \in R$ zwei reelle Zahlen, die wir für unsere Betrachtungen festhalten wollen. Mit W bezeichnen wir die Menge aller Paare $(\alpha, \beta) \in R^2$, die der Gleichung

$$\alpha_0 \cdot \alpha + \beta_0 \cdot \beta = 0$$

genügen.

Betrachten wir zwei Paare $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in W$, so gilt $\alpha_0 \cdot \alpha + \beta_0 \cdot \beta = 0$ und $\alpha_0 \cdot \gamma + \beta_0 \cdot \delta = 0$. Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$\alpha_0 \cdot (\alpha + \gamma) + \beta_0 \cdot (\beta + \delta) = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß das Paar $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ zu W gehört, und wie wir wissen, ist $(\alpha + \gamma, \beta + \delta) = (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)$. Mit je zwei Elementen gehört also auch ihre Summe zur Teilmenge W. Ist $\alpha \in R$ und $(\beta, \gamma) \in W$, so gilt $\alpha_0 \cdot \beta + \beta_0 \cdot \gamma = 0$, und durch Multiplikation mit der

reellen Zahl α erhalten wir die Gleichung

$$\alpha_0 \cdot (\alpha \cdot \beta) + \beta_0 \cdot (\alpha \cdot \gamma) = 0,$$

die besagt, daß das Paar $(\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \gamma) = \alpha(\beta, \gamma)$ wieder zu W gehört. W ist also ein linearer Teilraum von $V = R^2$.

Wir können diese Überlegungen wiederum auf den Fall $V = R^n$ übertragen und nehmen dazu an, daß $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)} \in R$ gegebene reelle Zahlen seien, die im folgenden festgehalten werden. Mit W bezeichnen wir die Menge aller n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, die der Gleichung

$$\alpha_1^{(0)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(0)} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_n^{(0)} \cdot \alpha_n = 0$$

genügen.

Bedienen wir uns des Summenzeichens, so erhält diese Gleichung die Form $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j = 0$. Sind $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in W$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \beta_j = 0.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \beta_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j + \alpha_j^{(0)} \cdot \beta_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot (\alpha_j + \beta_j).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß das n-tupel

$$(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

zu W gehört. Ist $\alpha \in R$ und $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in W$, so folgt aus $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j = 0$ durch Multiplikation mit α

$$0 = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(0)} \cdot (\alpha \cdot \alpha_j).$$

Das bedeutet, daß auch $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n)$ ein n-tupel aus W ist, und wir haben bewiesen:

W ist ein linearer Teilraum von $V = R^n$.

3°.* Betrachten wir die in § 1, Nr. 3, Beispiel 5° angegebenen Vektorräume, so ist offenbar $D_j(\alpha_0, \beta_0)$ ein Teilraum von $D_i(\alpha_0, \beta_0)$ sobald $i \leq j$ ist.*

4°. Der in § 1, Nr. 3, Beispiel 7° angegebene Vektorraum P_n ist ein Teilraum des in § 1, Nr. 3, Beispiel 6° genannten Vektorraumes P.

In jedem Vektorraum V gibt es zwei „triviale" Teilräume. Zunächst ist der Vektorraum $W = V$ ein Teilraum von V, oder anders ausgedrückt: *Jeder Vektorraum ist Teilraum von sich selbst.* Die von dem ganzen Vektorraum V verschiedenen Teilräume W heißen *echte Teilräume* von V.

Besteht die Menge W nur aus dem Nullvektor $\boldsymbol{o}$ von V, so ist W ein linearer Teilraum von V. Wir bezeichnen diesen Teilraum mit $\{\boldsymbol{o}\}$. Die von $\{\boldsymbol{o}\}$ verschiedenen echten Teilräume von V heißen *nichttriviale Teilräume* von V.

4. DER DURCHSCHNITT LINEARER TEILRÄUME

In Nr. 1 haben wir darauf hingewiesen, daß es häufig zweckmäßig ist, einen dem betrachteten Problem angemessenen Teilraum zu wählen. Dabei kann es vorkommen,

daß man zur Behandlung verschiedener Aspekte des gleichen Problems verschiedene Teilräume wählen wird, so daß die gleichzeitige Betrachtung mehrerer Teilräume eines linearen Vektorraumes und der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen notwendig wird. Diesen Fragen wollen wir uns jetzt zuwenden.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein, die der Mengenlehre entlehnt sind und die im folgenden benutzt werden. Ist X eine Menge (z. B. von reellen Zahlen oder Vektoren usw.), so schreiben wir für die Aussage „X_1 ist eine Teilmenge von X" kurz $X_1 \subseteq X$ und lesen „X_1 ist enthalten in X". Das bedeutet, daß jedes Element von X_1 ein Element von X ist. Ist W ein linearer Teilraum von V, so ist jeder Vektor aus W ein Vektor aus V, und wir können schreiben $W \subseteq V$. Natürlich ist nicht jede Teilmenge eines linearen Vektorraumes V ein linearer Teilraum von V. (Der Leser überlege sich dies an einem einfachen Beispiel.) Sind X_1 und X_2 zwei Mengen, so bezeichnet man die Menge aller Elemente, die in X_1 *und* in X_2 liegen, mit $X_1 \cap X_2$ und nennt sie den *Durchschnitt der Mengen* X_1 *und* X_2. Sind W_1 und W_2 lineare Teilräume eines linearen Vektorraumes V, so ist $W_1 \cap W_2$ die Menge aller Vektoren aus V, die dem Teilraum W_1 *und* dem Teilraum W_2 angehören.

Wir beweisen den folgenden Satz:

I. *Sind W_1 und W_2 lineare Teilräume des linearen Vektorraumes V, so ist auch $W_1 \cap W_2$ ein linearer Teilraum von V.*

Zum Beweis müssen wir prüfen, ob das in Nr. 2 genannte Kriterium erfüllt ist. Es seien $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ zwei Vektoren aus dem Durchschnitt $W_1 \cap W_2$. Das bedeutet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1$ *und* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_2$. Da W_1 und W_2 lineare Teilräume sind, gilt also $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1$ *und* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_2$. Dann ist aber $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2$. Ist $\alpha \in R$ und $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$, so ist $\boldsymbol{x} \in W_1$ *und* $\boldsymbol{x} \in W_2$, und da W_1 und W_2 nach Voraussetzung lineare Teilräume sind, gilt auch $\alpha\boldsymbol{x} \in W_1$ *und* $\alpha\boldsymbol{x} \in W_2$. Es ist also $\alpha\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$, und das Kriterium aus Nr. 2 ist erfüllt. Der Satz I ist bewiesen.

Der angegebene Beweis läßt sich ohne Mühe auf den Fall von mehr als zwei Teilräumen eines linearen Vektorraumes übertragen. Die Anzahl der betrachteten Teilräume braucht dabei nicht einmal endlich zu sein. Um dies einzusehen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}$ ein System von Teilräumen eines linearen Vektorraumes V. (In dem in Satz I behandelten Fall besteht $\mathfrak{W}$ aus den beiden Teilräumen W_1 und W_2.) Wir wollen nur annehmen, daß das System $\mathfrak{W}$ wenigstens einen Teilraum enthält. Unter dem *Durchschnitt der Teilräume des Systems* $\mathfrak{W}$ verstehen wir die Menge der Vektoren aus dem Vektorraum V, die in allen zum System $\mathfrak{W}$ gehörenden Teilräumen enthalten sind. Diesen Durchschnitt bezeichnen wir mit $\bigcap_{W \in \mathfrak{W}} W$. Ein Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ gehört zum Durchschnitt $\bigcap_{W \in \mathfrak{W}} W$, wenn für jeden Teilraum $W \in \mathfrak{W}$, d. h. für jeden Teilraum W, der zu dem System $\mathfrak{W}$ gehört, $\boldsymbol{x} \in W$ gilt.

I'. *Ist $\mathfrak{W}$ ein System von linearen Teilräumen des Vektorraumes V, das wenigstens einen Teilraum enthält, so ist auch $W^* = \bigcap_{W \in \mathfrak{W}} W$ ein Teilraum von V.*

Zum Beweis prüfen wir wieder das in Nr. 2 bewiesene Kriterium. Es seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei Vektoren aus W^*; ist W ein beliebiger Teilraum von V, der in $\mathfrak{W}$ vorkommt, so

ist jeder Vektor aus W^* ein Vektor aus W. Es gilt also $x, y \in W$ für jedes $W \in \mathfrak{B}$. Da W ein Teilraum ist, ist auch $x + y \in W$, und für jedes $\alpha \in R$ und $x \in W$ gilt $\alpha x \in W$. Diese Überlegungen sind für jeden Teilraum $W \in \mathfrak{B}$ richtig. Damit ist $x + y \in \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W$ sowie $\alpha x \in \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W$, und das Kriterium ist erfüllt.

5⁰. Zur Erläuterung betrachten wir den Vektorraum $V = R^3$ der Tripel reeller Zahlen. Sind $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}$ gegebene Zahlen, so definieren sie zwei lineare Teilräume W_1 und W_2 des Vektorraumes R^3 (vgl. Beispiel 2⁰). Der Teilraum W_1 besteht aus allen Tripeln $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, für die

$$\alpha_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(1)} \cdot \alpha_2 + \alpha_3^{(1)} \cdot \alpha_3 = 0$$

ist, während der Teilraum W_2 aus den Tripeln $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ besteht, für die

$$\alpha_1^{(2)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(2)} \cdot \alpha_2 + \alpha_3^{(2)} \cdot \alpha_3 = 0$$

ist. Der Durchschnitt $W_1 \cap W_2$ ist nach Satz I ein linearer Teilraum und besteht aus allen Tripeln $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, für die die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(1)} \cdot \alpha_2 + \alpha_3^{(1)} \cdot \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1^{(2)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(2)} \cdot \alpha_2 + \alpha_3^{(2)} \cdot \alpha_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gelten. *Die Menge aller Tripel* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, *für die gleichzeitig die beiden obigen Gleichungen gelten, bilden einen linearen Teilraum von* R^3.

Ist $V = R^n$ und sind $m \cdot n$ reelle Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}; \ldots; \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_n^{(m)}$ gegeben, so definieren die Zahlen $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, m$ einen linearen Teilraum W_i von $V = R^n$ (vgl. Beispiel 2⁰). Der Teilraum W_i besteht aus allen n-tupeln $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, die der Gleichung

$$\alpha_1^{(i)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(i)} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_n^{(i)} \cdot \alpha_n = 0$$

genügen. Es sei $\mathfrak{B}$ das System der Teilräume W_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. $\mathfrak{B}$ besteht also aus m linearen Teilräumen, und es sei $W^* = \bigcap_{W_i \in \mathfrak{B}} W_i$. Wir schreiben dafür auch $W^* = \bigcap_{i=1}^{m} W_i$. Nach Satz I′ ist W^* ein linearer Teilraum von V und besteht aus allen n-tupeln $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, die in allen Teilräumen W_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ liegen. Der Teilraum W^* enthält also alle und nur die n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, die den folgenden m Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(1)} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)} \cdot \alpha_n = 0, \\ \alpha_1^{(2)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(2)} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)} \cdot \alpha_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(m)} \cdot \alpha_1 + \alpha_2^{(m)} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_n^{(m)} \cdot \alpha_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Je $m \cdot n$ *reelle Zahlen definieren einen linearen Teilraum* W^* *von* R^n *als das System aller* n*-tupel* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, *die den Gleichungen* (2) *genügen.*

Der Durchschnitt eines Systems $\mathfrak{B}$ von linearen Teilräumen besteht nach Definition aus *allen* Vektoren, die jedem Teilraum $W \in \mathfrak{B}$ angehören. Ist $\tilde{W}$ ein linearer Teilraum, der in jedem Teilraum $W \in \mathfrak{B}$ enthalten ist, so gehören alle Vektoren aus $\tilde{W}$ auch zum Durchschnitt des Systems $\mathfrak{B}$, und es gilt $\tilde{W} \subseteq W^* = \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W$. Hieraus und

aus Satz I′ erhalten wir folgende Charakterisierung des Durchschnitts eines Systems von linearen Teilräumen:

II. *Der Durchschnitt* $W^* = \bigcap_{W \in \mathfrak{V}} W$ *eines Systems* $\mathfrak{V}$ *von linearen Teilräumen ist der größte lineare Teilraum, der in allen Teilräumen von* $\mathfrak{V}$ *enthalten ist.*

5. DIE LINEARE HÜLLE; LINEARKOMBINATIONEN; LINEARE ABHÄNGIGKEIT; DIE SUMME LINEARER TEILRÄUME; ERZEUGENDENSYSTEME

In Nr. 4 haben wir uns mit Teilräumen beschäftigt, die in einem oder mehreren gegebenen Teilräumen enthalten sind. Zum Abschluß dieser Betrachtungen konnten wir die Existenz eines größten in allen Teilräumen eines gegebenen Systems enthaltenen linearen Teilraumes feststellen.

In diesem Abschnitt soll uns die etwas schwierigere, aber auch ungleich wichtigere umgekehrte Frage beschäftigen. Suchen wir zunächst einen linearen Teilraum, der zwei oder mehrere gegebene Teilräume enthält, so hat der triviale Teilraum $W = V$ offenbar diese Eigenschaft. Fragen wir jedoch nach einem kleinsten Teilraum, der zwei oder mehrere gegebene Teilräume enthält, so ist diese Frage schwieriger und nicht mehr wie in dem vorher betrachteten umgekehrten Fall mit rein mengentheoretischen Hilfsmitteln zu beantworten. Wir untersuchen die etwas allgemeinere Fragestellung nach einem kleinsten Teilraum, der eine gegebene Menge von Vektoren enthält. Aus den Bemerkungen am Anfang dieses Paragraphen geht hervor, daß dieser kleinste eine gegebene Menge von Vektoren enthaltende Teilraum auch für die Anwendungen von großer Bedeutung ist. Die Existenz eines solchen Teilraumes gestattet es, einen möglichst kleinen, dem jeweiligen Problem angemessenen Vektorraum zur Untersuchung zu wählen.

Wie in Nr. 4 beginnen wir mit einigen Begriffen aus der Mengenlehre. Sind X_1 und X_2 zwei Mengen, so versteht man unter der *Vereinigung der Mengen* X_1 *und* X_2, die man mit $X_1 \cup X_2$ bezeichnet, die Menge aller Elemente, die zu X_1 *oder* zu X_2 gehören. Sind W_1 und W_2 lineare Teilräume des Vektorraumes V, so besteht $W_1 \cup W_2$ aus allen Vektoren, die in W_1 *oder* in W_2 liegen. Im Unterschied zum Durchschnitt *ist die Vereinigung zweier linearer Teilräume im allgemeinen kein linearer Teilraum.*

6⁰. Wir erläutern dies durch ein Beispiel und betrachten im R^2 den Teilraum W_1 aller Paare $(\alpha, 0)$ und den Teilraum W_2 aller Paare $(0, \beta)$. W_1 besteht also aus allen Paaren reeller Zahlen, für die an der zweiten Stelle die Null steht, während W_2 aus allen Paaren reeller Zahlen besteht, für die an der ersten Stelle die Zahl 0 steht (vgl. Beispiel 1⁰). Die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ ist die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die an der ersten *oder* an der zweiten Stelle eine Null steht. Die Summe $(\alpha, 0) + (0, \beta) = (\alpha, \beta)$ zweier Elemente aus $W_1 \cup W_2$ ist aber nicht aus dieser Menge, wenn $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ ist. Damit ist $W_1 \cup W_2$ in diesem Fall kein linearer Teilraum des Vektorraumes R^2.

Die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ zweier linearer Teilräume ist im allgemeinen lediglich eine Menge von Vektoren aus dem Vektorraum V. Eine Menge von Vektoren eines linearen Vektorraumes bezeichnen wir im folgenden mit großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ vom Anfang des Alphabets. Fragen wir nach einem kleinsten Teilraum, der die gegebenen Teilräume W_1 und W_2 enthält, so bedeutet dies, daß wir einen kleinsten Teilraum suchen, der die Menge $\mathfrak{A} = W_1 \cup W_2$ von Vektoren enthält. Wir wollen unsere Fragestellung, insbesondere den Begriff „kleinster" Teilraum folgendermaßen präzisieren:

Es sei $\mathfrak{A}$ eine gegebene Menge von Vektoren eines linearen Vektorraumes V. Gesucht wird ein linearer Teilraum W^* von V mit folgenden Eigenschaften: a) $\mathfrak{A} \subseteqq W^*$, b) ist $\tilde{W}$ ein Teilraum von V, der die Menge $\mathfrak{A}$ enthält, so enthält er auch den Teilraum W^*.

Einen linearen Teilraum W^* mit den Eigenschaften a) und b) nennen wir einen *kleinsten* oder *minimalen Teilraum, der die Menge* $\mathfrak{A}$ *enthält.*

Wir beweisen folgenden Existenz- und Einzigkeitssatz:

III. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine gegebene Menge von Vektoren aus* V, *so gibt es genau einen minimalen, die Menge* $\mathfrak{A}$ *enthaltenden linearen Teilraum* W^* *von* V.

Wir beweisen zunächst die Einzigkeit und nehmen an, W_1^* und W_2^* seien im obigen Sinne minimale, die Menge $\mathfrak{A}$ enthaltende Teilräume von V. Wegen der Eigenschaft a) gilt $\mathfrak{A} \subseteqq W_1^*$ und $\mathfrak{A} \subseteqq W_2^*$. Da W_1^* aber auch die Eigenschaft b) besitzt, folgt aus $\mathfrak{A} \subseteqq W_2^*$, daß auch $W_1^* \subseteqq W_2^*$ ist. Vertauscht man die Rollen von W_1^* und W_2^*, so gilt $W_2^* \subseteqq W_1^*$ und damit $W_1^* = W_2^*$. Es gibt also höchstens einen minimalen, die Menge $\mathfrak{A}$ enthaltenden Teilraum.

Für den Existenzbeweis betrachten wir das System $\mathfrak{B}$ *aller* linearen Teilräume W von V, die die Menge $\mathfrak{A}$ enthalten. Der ganze Vektorraum V gehört zu diesem System $\mathfrak{B}$, denn er enthält die Menge $\mathfrak{A}$. Wir betrachten nun den Durchschnitt $W^* = \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W$ dieses Systems $\mathfrak{B}$, der nach Satz I' ein linearer Teilraum von V ist. Da jeder Teilraum $W \in \mathfrak{B}$ die gegebene Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V enthält, ist $\mathfrak{A}$ auch im Durchschnitt enthalten, und es gilt $\mathfrak{A} \subseteqq W^*$. Ist $\tilde{W}$ ein linearer Teilraum, der die Menge $\mathfrak{A}$ enthält, so ist $\tilde{W} \in \mathfrak{B}$, und der Durchschnitt über alle Teilräume aus $\mathfrak{B}$ ist in $\tilde{W}$ enthalten. Es gilt also $W^* \subseteqq \tilde{W}$. Der lineare Teilraum $W^* = \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W$ besitzt die Eigenschaften a) und b), und Satz III ist bewiesen.

Aus Satz III ergibt sich als Folgerung: *Ist* $\mathfrak{A}_1$ *eine Menge von Vektoren, die in der Menge* $\mathfrak{A}$ *enthalten ist*: $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}$, *und ist* W_1^* *bzw.* W^* *der minimale Teilraum, der die Menge* $\mathfrak{A}_1$ *bzw.* $\mathfrak{A}$ *enthält, so ist* W_1^* *in* W^* *enthalten*: $W_1^* \subseteqq W^*$.

Der lineare Teilraum W^* enthält die Menge $\mathfrak{A}$ und wegen $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$ auch die Menge $\mathfrak{A}_1$. Nach der Eigenschaft b) des linearen Teilraumes W_1^* folgt daraus $W_1^* \subseteq W^*$.

Wir wollen den minimalen, eine gegebene Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren enthaltenden linearen Teilraum noch in anderer Weise, und zwar durch die Elemente der Menge $\mathfrak{A}$ charakterisieren. Der Einfachheit halber setzen wir zunächst voraus, daß die Menge $\mathfrak{A}$ endlich ist und aus den Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besteht. Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liegen also in dem linearen Teilraum W^*. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ beliebige reelle Zahlen, so gehören die Vielfachen $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n$ ebenfalls dem Teilraum W^* an, und schließlich ist auch ihre Summe, der Vektor

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{3}$$

ein Vektor aus W^*.

Ein Vektor $y \in V$, der sich in der Form (3) durch die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ darstellen läßt, heißt eine *Linearkombination der Vektoren* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ein Vektor $y \in V$ heißt *linear abhängig von den Vektoren* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wenn er eine Linearkombination dieser Vektoren ist.

Unter Verwendung der soeben eingeführten Begriffe können wir die obigen Überlegungen folgendermaßen zusammenfassen: *Ist* $\mathfrak{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *eine endliche Menge von Vektoren, so enthält der minimale, die Menge* $\mathfrak{A}$ *enthaltende Teilraum* W^* *alle Linearkombinationen der Vektoren* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, oder, was das gleiche ist, W^* *enthält alle von* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linear abhängigen Vektoren aus* V.

Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche Menge, so betrachten wir eine beliebige endliche Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$. Der lineare Teilraum W^*, der die Menge $\mathfrak{A}$ enthält, enthält auch die endliche Menge $\mathfrak{A}_1$, und nach den obigen Überlegungen enthält W^* auch alle Linearkombinationen der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ oder alle von den Elementen von $\mathfrak{A}_1$ linear abhängigen Vektoren.

Ein Vektor $y \in V$ heißt eine *endliche Linearkombination von Vektoren aus der Menge* $\mathfrak{A}$, wenn es eine endliche Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ gibt, so daß y eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ ist. Ein Vektor $y \in V$ heißt *linear abhängig von den Vektoren aus* $\mathfrak{A}$, wenn er eine endliche Linearkombination von Vektoren aus $\mathfrak{A}$ ist, das bedeutet, es gibt eine endliche Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$, so daß y von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1$ linear abhängig ist.

Wir haben die wichtigen Begriffe Linearkombination von Vektoren aus einer Menge sowie lineare Abhängigkeit von den Vektoren einer Menge durch diese Definitionen auf unendliche Mengen ausgedehnt.

Ist $\mathfrak{A}$ eine gegebene nicht leere Menge, so bezeichnet man die Menge *aller* endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus $\mathfrak{A}$ oder, was das gleiche ist, die Menge *aller* von den Vektoren aus $\mathfrak{A}$ linear abhängigen Vektoren aus V mit $L(\mathfrak{A})$ und nennt sie die *lineare Hülle von* $\mathfrak{A}$.

Die Menge $\mathfrak{A}$ ist in ihrer linearen Hülle $L(\mathfrak{A})$ enthalten. Ist $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}$, so betrachten wir die einelementige Teilmenge $\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{x}\}$ von $\mathfrak{A}$. Es gilt $\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$, und der Vektor $\boldsymbol{x}$ ist eine Linearkombination der Vektoren aus der endlichen Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$. *Jeder Vektor ist von sich selbst linear abhängig.*

Aus unseren oben angestellten Überlegungen erhalten wir die folgende Aussage:

Ist W^* der minimale, die Menge $\mathfrak{A}$ enthaltende Teilraum, so enthält W^* die lineare Hülle $L(\mathfrak{A})$ der Menge $\mathfrak{A}$, d. h. $L(\mathfrak{A}) \subseteqq W^*$.

Wir beweisen den folgenden Satz:

IV. *Die lineare Hülle $L(\mathfrak{A})$ einer nicht leeren Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V ist ein linearer Teilraum von V.*

Aus diesem Satz erhalten wir unmittelbar die folgende Charakterisierung des Vektorraumes W^*:

V. *Der minimale, die Menge $\mathfrak{A}$ enthaltende Teilraum W^* von V ist die lineare Hülle $L(\mathfrak{A})$ der Menge $\mathfrak{A}$, d. h. $W^* = L(\mathfrak{A})$.*

Wir haben schon festgestellt, daß $L(\mathfrak{A}) \subseteqq W^*$ ist. Nehmen wir jetzt an, der Satz IV sei bewiesen, dann ist $L(\mathfrak{A})$ ein linearer Teilraum, der die Menge $\mathfrak{A}$ enthält. Aus der Eigenschaft b) des linearen Teilraumes W^* folgt aber $W^* \subseteqq L(\mathfrak{A})$ und daraus $W^* = L(\mathfrak{A})$.

Nun muß der Satz IV bewiesen werden. Es seien $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in L(\mathfrak{A})$. Dann gibt es endliche Teilmengen $\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ und $\mathfrak{A}_1' = \{\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2', \ldots, \boldsymbol{x}_{m'}'\}$ von $\mathfrak{A}$, so daß $\boldsymbol{y}$ von den Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ und $\boldsymbol{y}'$ von den Vektoren aus $\mathfrak{A}_1'$ linear abhängig ist. Es gibt also reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{m'}'$, so daß die folgenden Gleichungen gelten:

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m, \quad \boldsymbol{y}' = \alpha_1'\boldsymbol{x}_1' + \alpha_2'\boldsymbol{x}_2' + \cdots + \alpha_{m'}'\boldsymbol{x}_{m'}'.$$

Ist $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_1'$ die Vereinigung der endlichen Teilmengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ von $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{A}_0$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$, und der Vektor $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}'$ ist eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathfrak{A}_0$:

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m + \alpha_1'\boldsymbol{x}_1' + \alpha_2'\boldsymbol{x}_2' + \cdots + \alpha_{m'}'\boldsymbol{x}_{m'}'.$$

Der Vektor $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}'$ liegt also in der linearen Hülle $L(\mathfrak{A})$. Es sei wiederum $\boldsymbol{y} \in L(\mathfrak{A})$ und

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n$$

eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$. Ist $\alpha \in R$, so gilt

$$\alpha\boldsymbol{y} = (\alpha \cdot \alpha_1)\boldsymbol{x}_1 + (\alpha \cdot \alpha_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_n)\boldsymbol{x}_n,$$

und $\alpha\boldsymbol{y}$ ist ebenfalls eine Linearkombination der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$. Damit gilt $\alpha\boldsymbol{y} \in L(\mathfrak{A})$, und das in Nr. 2 bewiesene Kriterium ist erfüllt: *Die lineare Hülle $L(\mathfrak{A})$ ist ein linearer Teilraum.*

Zum Schluß betrachten wir die Frage nach der Vereinigung von Teilräumen, die uns zu diesen Überlegungen veranlaßt hat, noch etwas genauer.

Zunächst sei $\mathfrak{A} = W$ selbst ein Teilraum von V. Der kleinste Teilraum W^* von V, der die Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V enthält, ist in diesem Fall offenbar der Teilraum W selbst, und wir erhalten:

VI. *Ist W ein Teilraum des Vektorraumes V, so ist $L(W) = W$. Die lineare Hülle eines Teilraumes ist gleich diesem Teilraum.*

Es sei nun $\mathfrak{B}$ ein nicht leeres System von Teilräumen von V und $\mathfrak{A} = \bigcup_{W \in \mathfrak{B}} W$. Der lineare Teilraum $L(\bigcup_{W \in \mathfrak{B}} W)$ heißt die *Summe der Teilräume* $W \in \mathfrak{B}$ und wird mit $\sum_{W \in \mathfrak{B}} W$ bezeichnet.

*Wir untersuchen die Elemente des Teilraumes $\sum_{W \in \mathfrak{B}} W$. Der kleinste, die Menge $\mathfrak{A} = \bigcup_{W \in \mathfrak{B}} W$ enthaltende Teilraum besteht nach Satz V aus allen Linearkombinationen von je endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{A}$. Es sei $y \in L(\mathfrak{A})$ eine solche Linearkombination:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Dabei ist $x_i \in \mathfrak{A} = \bigcup_{W \in \mathfrak{B}} W$, d. h., zu jedem x_i gibt es einen Vektorraum $W_i \in \mathfrak{B}$, in dem x_i enthalten ist. Mit x_i ist aber auch $\alpha_i x_i = y_i \in W_i$, und wir erhalten

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \tag{4}$$

Falls zwei oder mehrere der Teilräume W_i gleich sind, z. B. $W_i = W_j$ $(i \neq j)$, so ist $y_i + y_j \in W_i$, und man kann die Darstellung (4) von y als Summe von Vektoren aus endlich vielen der in $\mathfrak{B}$ eingehenden Teilräume noch verkürzen. Da einerseits jedes Element $y \in L(\mathfrak{A})$ in der Form (4) dargestellt werden kann und da andererseits auch jede Summe der Form (4) eine Linearkombination (mit den Koeffizienten $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$) von endlich vielen Vektoren aus $\mathfrak{A}$ ist und infolgedessen zu $L(\mathfrak{A})$ gehört, erhalten wir:

VII. *Ist $\mathfrak{B}$ ein nicht leeres System von Teilräumen des Vektorraumes V, so besteht der Teilraum $L\left(\bigcup_{W \in \mathfrak{B}} W\right)$ aus allen Summen von je endlich vielen Vektoren der Teilräume $W \in \mathfrak{B}$.* *

7°. Als Beispiel betrachten wir den Vektorraum R^n der n-tupel von reellen Zahlen und setzen

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Dann ist $L(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}) = R^n$. Der Teilraum $L(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ besteht nach Definition aus allen Linearkombinationen

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Beachtet man die in § 1, Nr. 3, Beispiel 2° angegebene Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen, so ist $y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, und jedes n-tupel $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ läßt sich in der Form

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

als Linearkombination der Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ schreiben.

Es sei W_i die Menge aller n-tupel, in denen höchstens an der i-ten Stelle eine von Null verschiedene reelle Zahl steht: $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in W_i$ bedeutet $\xi_j = 0$ für alle $j \neq i$. Dann ist $e_i \in W_i$, und jeder

Vektor aus W_i läßt sich in der Form αe_i schreiben. Es ist also $W_i = L(\{e_i\})$, und W_i ist ein linearer Teilraum von R^n. Setzen wir $\mathfrak{A}' = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, so gilt offenbar

$$V = L(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}) = L(\mathfrak{A}') = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

8⁰. Ist $V = R^\infty$ der Vektorraum der Folgen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots) = (\xi_i)_{i=1,2,\ldots}$, so ordnen wir jeder natürlichen Zahl j die Folge $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,2,\ldots}$ zu, wobei δ_{ij} durch die Gleichung

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

definiert ist. δ_{ij} wird das *Kronecker-Symbol* genannt. In der Folge e_j steht also an der Stelle mit dem Index j die Zahl 1, während alle anderen Stellen durch Nullen besetzt sind. Nun sei $\mathfrak{A} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ die Menge aller so definierten Vektoren e_j. Der Teilraum $L(\mathfrak{A})$ besteht aus allen Linearkombinationen von endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{A}$

$$y = \alpha_{j_1} e_{j_1} + \alpha_{j_2} e_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_n} e_{j_n}.$$

Nach der in § 1, Nr. 3, Beispiel 3⁰ angegebenen Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl ist y diejenige Folge, in der an der Stelle j_1 die Zahl α_{j_1}, an der Stelle j_2 die Zahl α_{j_2}, ..., an der Stelle j_n die Zahl α_{j_n} steht, während alle anderen Stellen mit Nullen besetzt sind. Der Teilraum $L(\mathfrak{A})$ besteht also aus allen Folgen von reellen Zahlen, in denen fast alle Stellen (d. h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen) mit Nullen besetzt sind.

Ist W_j die Menge aller Folgen von reellen Zahlen, für die alle Stellen mit einem von j verschiedenen Index mit Nullen besetzt sind, so ist e_j ein Vektor aus W_j, und jeder andere Vektor aus W_j ist in der Form αe_j darstellbar. Damit können wir sagen: $W_j = L(\{e_j\})$, und W_j ist ein Teilraum von V. Setzen wir $\mathfrak{A}' = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$, so besteht $L(\mathfrak{A}')$ aus allen Summen der Form

$$y = y_{j_1} + y_{j_2} + \cdots + y_{j_n}; \quad y_{j_i} \in W_{j_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

und aus $y_{j_1} = \alpha_{j_1} e_{j_1}, y_{j_2} = \alpha_{j_2} e_{j_2}, \ldots, y_{j_n} = \alpha_{j_n} e_{j_n}$ erhalten wir $L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}') = \sum_{j=1}^{\infty} W_j$.

Eine Menge $\mathfrak{E}$ von Vektoren eines linearen Vektorraumes V heißt ein *Erzeugendensystem* von V, wenn $V = L(\mathfrak{E})$ ist. Die Vektoren aus $\mathfrak{E}$ heißen *Erzeugende des Vektorraumes* V, und wir sagen auch, daß *V von den Vektoren aus $\mathfrak{E}$ erzeugt wird.*

9⁰. Die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bilden ein Erzeugendensystem des Vektorraumes R^n. Der Vektor e_i ist ein Erzeugendensystem des Teilraumes W_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

6. AUFGABEN

1. Der Vektorraum R der reellen Zahlen (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiel 1⁰) ist ein linearer Teilraum des Vektorraumes Ω der komplexen Zahlen (vgl. § 1, Aufgabe 1).

2. Man überlege sich, daß für jeden Vektorraum V die Menge $W = \{o\}$ ein Teilraum von V ist, wie am Schluß von Nr. 3 behauptet wird.

3.* Es sei $\mathfrak{M}$ eine gegebene Menge und $\mathfrak{K}$ ein System von Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Man beweise die Gleichung

$$\bigcap_{\mathfrak{M}' \in \mathfrak{K}} R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}') = R\Big(\mathfrak{M} / \bigcup_{\mathfrak{M}' \in \mathfrak{K}} \mathfrak{M}'\Big).$$

4. Man beweise folgende Aussagen:
Ist W ein linearer Teilraum des Vektorraumes V und W' ein linearer Teilraum von W, so ist W' auch ein linearer Teilraum von V.
Sind W und W' lineare Teilräume von V und ist W' eine Teilmenge von W, so ist W' ein linearer Teilraum von W.

5. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei Mengen von Vektoren des linearen Vektorraumes V und ist $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}_2$, so gilt $L(\mathfrak{A}_1) \subseteqq L(\mathfrak{A}_2)$. Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge von Vektoren des linearen Vektorraumes V, so gilt $L(L(\mathfrak{A})) = L(\mathfrak{A})$.

6.* Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei Mengen von Vektoren des linearen Vektorraumes V, so gilt

$$L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2) = L(\mathfrak{A}_1) + L(\mathfrak{A}_2), \quad L(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \subseteqq L(\mathfrak{A}_1) \cap L(\mathfrak{A}_2).$$

Man gebe ein Beispiel an, für das $L(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2) \neq L(\mathfrak{A}_1) \cap L(\mathfrak{A}_2)$ ist. Bezeichnet Φ die leere Menge, so bestimme man den kleinsten die Menge Φ enthaltenden Teilraum W^* von V. Dieser Teilraum wird auch mit $L(\Phi)$ bezeichnet.

7. Ist $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem des linearen Vektorraumes V, so gilt $V = \sum_{x \in \mathfrak{E}} L(\{x\})$.

§ 3. MANNIGFALTIGKEITEN

1. EINLEITUNG

Der Begriff der linearen Mannigfaltigkeit ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Teilraumes, wie wir ihn im § 2 kennengelernt haben. Denken wir uns die Translationen des Raumes durch gerichtete Strecken repräsentiert, die alle von einem festen Punkt P des Raumes ausgehen, so bilden diejenigen Vektoren, deren Repräsentanten in einer Geraden oder Ebene durch den Punkt P liegen, einen linearen Teilraum. Wir können sagen, daß die Geraden und Ebenen durch den Punkt P lineare Teilräume des Vektorraumes der räumlichen Translationen veranschaulichen. Betrachten wir beliebige Geraden und Ebenen, die nicht notwendig durch den Punkt P gehen, so veranschaulichen sie die sogenannten linearen Mannigfaltigkeiten im Vektorraum der räumlichen Translationen. Eine beliebige Ebene erhält man aus einer Ebene durch den Punkt P mit Hilfe einer Parallelverschiebung. Entsprechend definieren wir die linearen Mannigfaltigkeiten als „verschobene" lineare Teilräume.

2. LINEARE MANNIGFALTIGKEITEN

Es sei V ein linearer Vektorraum. Unter einer *linearen Mannigfaltigkeit* M des Vektorraumes V verstehen wir eine Menge von Vektoren aus V mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen Vektor x_0 aus dem Vektorraum V und einen linearen Teilraum W von V, so daß $M = x_0 + W$ ist. Die Gleichung $M = x_0 + W$ verstehen wir dabei folgendermaßen: M ist die Menge aller Vektoren $z \in V$, die sich in der Form $z = x_0 + y$ mit $y \in W$ schreiben lassen.

Wir erhalten also eine lineare Mannigfaltigkeit des Vektorraumes V, wenn wir den Teilraum W um den Vektor $\boldsymbol{x}_0$ „verschieben", d. h. die Menge $\boldsymbol{x}_0 + W$ aller Vektoren $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{y} \in W$ bilden. Jedem Paar $(\boldsymbol{x}_0, W)$, das aus einem Vektor $\boldsymbol{x}_0 \in V$ und einem linearen Teilraum W von V besteht, entspricht eine lineare Mannigfaltigkeit $M = \boldsymbol{x}_0 + W$.

Ist $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$ der Nullvektor aus V, so besteht M aus allen Vektoren $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{y} \in W$. Es ist $M = W$, und wir erhalten:

Jeder lineare Teilraum ist eine lineare Mannigfaltigkeit.

Ist $W = \{\boldsymbol{o}\}$ der triviale Teilraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, so ist $M = \boldsymbol{x}_0 + \{\boldsymbol{o}\} = \{\boldsymbol{x}_0\}$, und es gilt:

Jede einelementige Menge $\{\boldsymbol{x}_0\}$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit.

3.*[1]) BESCHREIBUNG VON MANNIGFALTIGKEITEN; EIN KRITERIUM

Ist $M = W$ ein linearer Teilraum, den wir als lineare Mannigfaltigkeit auffassen, so können wir M in der Form $M = \boldsymbol{o} + W$ schreiben. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit $M = W$ durch einen Vektor und einen Teilraum zu beschreiben. Ist nämlich $\boldsymbol{x}_0$ ein beliebiger Vektor aus W und bilden wir die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{y} \in W$, so erhalten wir wiederum den Teilraum W, und wir können schreiben $M = \boldsymbol{x}_0 + W$. Wir müssen untersuchen, inwieweit das Paar $(\boldsymbol{x}_0, W)$, das aus einem Vektor $\boldsymbol{x}_0$ und einem linearen Teilraum W von V besteht, durch die Mannigfaltigkeit $M = \boldsymbol{x}_0 + W$ bestimmt ist.

Dazu betrachten wir zwei lineare Mannigfaltigkeiten $M_1 = \boldsymbol{x}_1 + W_1$ und $M_2 = \boldsymbol{x}_2 + W_2$ und fragen, wann diese Mannigfaltigkeiten gleich sind. Zunächst sei $M_1 = M_2$. Dann ist $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{o} \in M_1$ und folglich $\boldsymbol{x}_1 \in M_2$. Es gibt also einen Vektor $\boldsymbol{y}_2 \in W_2$, so daß $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$ ist. Ganz entsprechend liegt der Vektor $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{o}$ in der Mannigfaltigkeit M_2 und damit in M_1. Es gibt also einen Vektor $\boldsymbol{y}_1 \in W_1$, so daß $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1$ ist. Dann ist aber $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1 = -\boldsymbol{y}_2$ ein Vektor aus $W_1 \cap W_2$. Es sei nun $\boldsymbol{y}_1'$ ein beliebiger Vektor aus W_1. Der Vektor $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1'$ gehört zu M_1 und folglich zu M_2. Es gibt also einen Vektor $\boldsymbol{y}_2'' \in W_2$, so daß gilt $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2''$. Dann ist $\boldsymbol{y}_1' = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_2''$ und damit $\boldsymbol{y}_1' \in W_2$. Betrachten wir ganz entsprechend einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{y}_2' \in W_2$, so folgt $\boldsymbol{y}_2' \in W_1$. Es ist $W_1 = W_2$.

Die gegebene Mannigfaltigkeit $M_1 = M_2$ bestimmt genau einen linearen Teilraum $W_1 = W_2$. Die beiden Vektoren $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ unterscheiden sich um einen Vektor aus diesem Teilraum.

---

[1]) Die Überlegungen von Nr. 3 und 5 werden erst in § 8, Nr. 2, Satz III und § 10, Nr. 4, Satz IV von Bedeutung sein. Der Leser kann die Lektüre dieser Abschnitte bis dahin zurückstellen.

Sind umgekehrt zwei Mannigfaltigkeiten $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ gegeben und nehmen wir an, daß $W_1 = W_2$ und $x_2 - x_1 \in W_1$ ist, so läßt sich zeigen, daß $M_1 = M_2$ ist. Es sei z_1 ein beliebiger Vektor aus M_1; dann gibt es einen Vektor $y_1 \in W_1$, so daß $z_1 = x_1 + y_1$ ist. Der Vektor $y_1 = z_1 - x_1$ ist aus W_1, und damit gilt $z_1 - x_1 \in W_2$. Ferner ist $x_2 - x_1 \in W_1$, also ist auch $x_1 - x_2 \in W_1$ und damit $x_1 - x_2 \in W_2$. Dann ist aber auch $z_1 - x_2 = (z_1 - x_1) + (x_1 - x_2) \in W_2$. Den Vektor $z_1 - x_2$ bezeichnen wir mit y_2 und erhalten $z_1 = x_2 + y_2$ mit $y_2 \in W_2$. Der Vektor z_1 gehört also zu M_2. Vertauschen wir in diesen Überlegungen die Indizes 1 und 2, so erhalten wir: Jeder Vektor $z_2 \in M_2$ ist auch ein Vektor aus M_1. Daraus ergibt sich die Behauptung $M_1 = M_2$. Wir fassen unsere Überlegungen in dem folgenden Satz zusammen:

I. *Zwei lineare Mannigfaltigkeiten $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ sind dann und nur dann gleich, wenn $W_1 = W_2$ und $x_2 - x_1 \in W_1$ ist.*

Dieser Satz läßt sich etwas anders formulieren:

I'. *Eine lineare Mannigfaltigkeit M bestimmt eindeutig einen linearen Teilraum W, aus dem sie durch „Verschiebung" um einen Vektor x_0 hervorgeht: $M = x_0 + W$. Der Vektor x_0 kann um beliebige Vektoren aus W abgeändert werden.*

Entsprechend dem im § 2 bewiesenen Kriterium für lineare Teilräume beweisen wir ein Kriterium für lineare Mannigfaltigkeiten.

Kriterium. *Eine nicht leere Menge M von Vektoren des linearen Vektorraumes V ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn mit je zwei Vektoren $z_1, z_2 \in M$ und je zwei reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ mit der Eigenschaft $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ auch der Vektor $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ zu M gehört.*

Es sei zunächst $M = x_0 + W$ eine lineare Mannigfaltigkeit. Dann sei $z_1 = x_0 + y_1$, $z_2 = x_0 + y_2$ und $y_1, y_2 \in W$. Es gilt

$$z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = \alpha_1 x_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_0 + \alpha_2 y_2$$

oder

$$z = (\alpha_1 + \alpha_2) x_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = x_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 .$$

Da $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in W$ ist, folgt $z \in M$.

Es sei M eine Menge von Vektoren und x_0 ein beliebiger Vektor aus M. Wir betrachten die Menge W aller Vektoren $z - x_0$, wobei z die Vektoren aus M durchläuft, und beweisen, daß W ein linearer Teilraum ist. Es seien $y_1, y_2 \in W$. Dann gibt es Vektoren $z_1, z_2 \in M$, so daß $y_1 = z_1 - x_0$ und $y_2 = z_2 - x_0$ ist, und es gilt

$$y_1 + y_2 = z_1 - x_0 + z_2 - x_0 = 2\left(\frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2\right) + (-1) x_0 - x_0 .$$

Da $z_1, z_2 \in M$ ist, gilt nach Voraussetzung $z_0 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in M$ für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Da $z_0, x_0 \in M$ ist, gilt wiederum nach Voraussetzung $\alpha_0 z_0 + \beta_0 x_0 \in M$ für $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = -1$. Es ist also $2\left(\frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2\right) + (-1)\, x_0 \in M$ und damit $y_1 + y_2 \in W$. Ist nun $y \in W$ und $\alpha \in R$, so gibt es ein $z \in M$, so daß $y = z - x_0$ ist. Dann ist aber

$$\alpha y = \alpha z - \alpha x_0 = \alpha z + (1 - \alpha)\, x_0 - x_0,$$

und aus $z, x_0 \in M$ folgt $\alpha z + (1 - \alpha)\, x_0 \in M$ und damit $\alpha y \in W$. W ist ein linearer Teilraum von V, und es gilt $M = x_0 + W$, womit das Kriterium bewiesen ist.*

4.* GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG

1°. Zur Erläuterung und Veranschaulichung des Begriffs der linearen Mannigfaltigkeit betrachten wir den linearen Vektorraum R^3 der Tripel von reellen Zahlen und den gewöhnlichen Raum. Wir nehmen an, daß im Raum ein Koordinatensystem ausgezeichnet ist, dessen Nullpunkt wir mit O bezeichnen. Ist $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein Tripel reeller Zahlen, so ordnen wir diesem Vektor aus R^3 den Punkt P: ξ_1, ξ_2, ξ_3 des Raumes mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 zu und erhalten eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Vektoren des R^3 und den Punkten des Raumes.

Ist M eine lineare Mannigfaltigkeit im R^3, so entspricht ihr vermöge der obigen Zuordnung eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ des Raumes. Wir sagen: Die Punktmenge $\mathfrak{M}$ *repräsentiert* die lineare Mannigfaltigkeit M.

Sind $z = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ und $z' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3')$ Vektoren aus M und P: ξ_1, ξ_2, ξ_3, P': ξ_1', ξ_2', ξ_3' die zugehörigen Punkte der Menge $\mathfrak{M}$, so gehören auf Grund des soeben bewiesenen Kriteriums alle Vektoren

$$\alpha z + \alpha' z' = (\alpha \cdot \xi_1 + \alpha' \cdot \xi_1', \alpha \cdot \xi_2 + \alpha' \cdot \xi_2', \alpha \cdot \xi_3 + \alpha' \cdot \xi_3'),$$

für die $\alpha + \alpha' = 1$ ist, zur Mannigfaltigkeit M. Diesen Vektoren entsprechen folgende Punkte der Menge $\mathfrak{M}$: Q: $\alpha \cdot \xi_1 + \alpha' \cdot \xi_1'$, $\alpha \cdot \xi_2 + \alpha' \cdot \xi_2'$, $\alpha \cdot \xi_3 + \alpha' \cdot \xi_3'$ mit $\alpha + \alpha' = 1$, die die Verbindungsgerade der Punkte P und P' ausfüllen. Die Punktmenge $\mathfrak{M}$, die die lineare Mannigfaltigkeit M repräsentiert, besitzt folgende Eigenschaft:

Mit je zwei Punkten aus $\mathfrak{M}$ gehören auch alle Punkte der Verbindungsgeraden zu $\mathfrak{M}$.

Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ mit dieser Eigenschaft nennt man eine *lineare* oder *ebene Menge*. Die ebenen Mengen des Raumes sind die einpunktigen Mengen, die Geraden, die Ebenen und der ganze Raum.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine ebene Menge im Raum und M die Menge der den Punkten aus $\mathfrak{M}$ entsprechenden Vektoren aus R^3. Sind $z = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ und $z' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3')$ zwei Vektoren aus M und P und P' die ihnen entsprechenden Punkte aus $\mathfrak{M}$, so enthält $\mathfrak{M}$ die ganze Verbindungsgerade der Punkte P und P'. $\mathfrak{M}$ enthält also alle Punkte Q mit den Koordinaten $\alpha \cdot \xi_1 + \alpha' \cdot \xi_1'$, $\alpha \cdot \xi_2 + \alpha' \cdot \xi_2'$, $\alpha \cdot \xi_3 + \alpha' \cdot \xi_3'$, wobei $\alpha + \alpha' = 1$ ist. Dann gehören aber alle Vektoren $\alpha z + \alpha' z'$ mit $\alpha + \alpha' = 1$ zu M, und M ist eine lineare Mannigfaltigkeit. Jede ebene Menge des Raumes repräsentiert eine lineare Mannigfaltigkeit im R^3.

Zwischen den linearen Mannigfaltigkeiten des R^3 und den ebenen Mengen des Raumes besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung.

Ist $M = W$ ein linearer Teilraum, so ist $o = (0, 0, 0) \in M$. Dem Vektor o entspricht bei der obigen Zuordnung der Nullpunkt O: 0, 0, 0 des Koordinatensystems. Dem linearen Teilraum $M = W$ entspricht also eine ebene Menge $\mathfrak{M}$, die den Nullpunkt O enthält.*

5.*[1]) DER DURCHSCHNITT LINEARER MANNIGFALTIGKEITEN

Wie bei der Untersuchung der linearen Teilräume betrachten wir den Durchschnitt zweier linearer Mannigfaltigkeiten und beweisen:

II. *Der Durchschnitt zweier linearer Mannigfaltigkeiten eines Vektorraumes V ist leer oder wiederum eine lineare Mannigfaltigkeit.*

Es seien $M_1 = x_1 + W_1$, $M_2 = x_2 + W_2$ lineare Mannigfaltigkeiten in V, und der Durchschnitt sei nicht leer. Betrachten wir einen Vektor $x_0 \in M_1 \cap M_2$, so folgt $x_0 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $y_1 \in W_1, y_2 \in W_2$, und nach Satz I' ist $M_1 = x_0 + W_1$ und $M_2 = x_0 + W_2$. Es gilt also genau dann $z \in M_1 \cap M_2$, wenn ein $y \in W_1 \cap W_2$ existiert, so daß $z = x_0 + y$ ist. Hieraus folgt $M_1 \cap M_2 = x_0 + W_1 \cap W_2$. Die Mannigfaltigkeit $M_1 \cap M_2$ bezeichnet man als *Schnittmannigfaltigkeit*, und wir können den Satz II wie folgt verschärfen:

II'. *Sind $M_1 = x_1 + W_1$, $M_2 = x_2 + W_2$ lineare Mannigfaltigkeiten im Vektorraum V, so ist ihr Durchschnitt leer oder eine lineare Mannigfaltigkeit $M_0 = x_0 + W_0$, deren zugehöriger Teilraum $W_0 = W_1 \cap W_2$ ist.* ∗

6.* DIE SUMME LINEARER MANNIGFALTIGKEITEN

Wir betrachten noch die Vereinigung zweier linearer Mannigfaltigkeiten. Wie für lineare Teilräume ist die Vereinigung zweier Mannigfaltigkeiten im allgemeinen keine lineare Mannigfaltigkeit, und wir definieren die *von zwei linearen Mannigfaltigkeiten aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit.*

Es seien $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ lineare Mannigfaltigkeiten im Vektorraum V. Als die *von M_1 und M_2 in V aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit* bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit

$$M_1 + M_2 \underset{\text{Def.}}{=} x_1 + L(W_1 \cup W_2 \cup \{x_2 - x_1\}).$$

III. *Der Vektorraum der von den beiden Mannigfaltigkeiten $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ aufgespannten Mannigfaltigkeit ist $W_1 + W_2$, wenn $M_1 \cap M_2$ nicht leer ist.*

Es sei $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Dann können wir $M_1 = x_0 + W_1$ und $M_2 = x_0 + W_2$ schreiben, und es ist

$$M_1 + M_2 = x_1 + L(W_1 \cup W_2 \cup \{o\}) = x_1 + (W_1 + W_2). \ast$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 27.

7. AUFGABEN

1.* Man zeige, daß der Durchschnitt beliebig vieler linearer Mannigfaltigkeiten eine lineare Mannigfaltigkeit ist, sofern er nicht leer ist. Was kann man über die zugeordneten linearen Teilräume aussagen?

2.* Man zeige: $M_1 + M_2$ ist der Durchschnitt aller linearen Mannigfaltigkeiten, die die Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 enthalten.

3.* Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge von Vektoren, so definiere man $M(\mathfrak{A})$ als den Durchschnitt aller Mannigfaltigkeiten, die $\mathfrak{A}$ enthalten. Man zeige

$$M(\mathfrak{A}) = x + L\left(\bigcup_{y \in \mathfrak{A}} \{y - x\}\right) \quad (x \in \mathfrak{A}).$$

4.* Man definiere eine Zuordnung zwischen den Vektoren des Vektorraumes R^2 und den Punkten der Ebene, die der für den Vektorraum R^3 und den Punkten des Raumes angegebenen Zuordnung analog ist.

§ 4. DIE BASIS

1. EINLEITUNG

Im § 2 haben wir den kleinsten Teilraum eines linearen Vektorraumes betrachtet, der eine gegebene Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus $\mathfrak{V}$ enthält. Wir haben diesen Teilraum auch den von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ erzeugten linearen Teilraum genannt. Häufig tritt nun der Fall ein, daß eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ den gleichen linearen Teilraum erzeugt. Die Menge $\mathfrak{A}_1$ ist „kleiner“, sie enthält weniger Vektoren als die ursprüngliche Menge $\mathfrak{A}$, der von ihr erzeugte Teilraum, die lineare Hülle $L(\mathfrak{A}_1)$, stimmt aber mit dem von $\mathfrak{A}$ erzeugten Teilraum, der linearen Hülle $L(\mathfrak{A})$, überein. Für die Untersuchung des betrachteten Teilraumes wird es in einem solchen Fall zweckmäßig sein, die kleinere Menge $\mathfrak{A}_1$ als Erzeugendensystem zu wählen. So entsteht die Frage nach einem möglichst kleinen Erzeugendensystem eines gegebenen Teilraumes, die eine gewisse Umkehrung der in § 2, Nr. 5 untersuchten Fragestellung ist. Da die erforderlichen Betrachtungen unabhängig davon sind, daß der gegebene Teilraum in einem größeren linearen Vektorraum enthalten ist, werden wir ihn als selbständigen linearen Vektorraum betrachten.

2. DIE BASIS

Es sei V ein linearer Vektorraum[1]) und $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem von V. Das bedeutet: $\mathfrak{E}$ ist eine Menge von Vektoren aus V, und es gilt $V = L(\mathfrak{E})$.

[1]) Um die Darlegungen nicht unnötig zu komplizieren, setzen wir in diesem und dem folgenden Paragraphen voraus, daß der lineare Vektorraum V wenigstens einen vom Nullvektor o verschiedenen Vektor besitzt.

Ist $V = \{o\}$, so ist es zweckmäßig, die leere Menge, die kein Element enthält, als Erzeugendensystem und später als Basis des linearen Vektorraumes $V = \{o\}$ zu definieren. Der Leser überlege sich, daß dann die Sätze I, II, II′, VII und VIII auf den Vektorraum $V = \{o\}$ formal zutreffen.

Wir erwähnen zunächst wieder einen Begriff der Mengenlehre. Ist M_1 eine Teilmenge der Menge M, so versteht man unter dem *Komplement der Menge M_1 in der Menge M* die Menge aller Elemente aus M, die nicht in der Teilmenge M_1 liegen. Für das Komplement von M_1 in M schreibt man $M \setminus M_1$.

Es sei $\mathfrak{E}_1$ eine Teilmenge des Erzeugendensystems $\mathfrak{E}$, die selbst Erzeugendensystem des Vektorraumes V ist. Dann gilt $V = L(\mathfrak{E}_1)$. Die lineare Hülle $L(\mathfrak{E}_1)$ ist nach § 2, Nr. 5 die Menge aller von den Vektoren aus $\mathfrak{E}_1$ linear abhängigen Vektoren aus V, und die Gleichung $V = L(\mathfrak{E}_1)$ bedeutet also, daß alle Vektoren aus V von den Vektoren der Menge $\mathfrak{E}_1$ linear abhängig sind. Insbesondere sind alle Vektoren der Menge $\mathfrak{E}$ und damit auch alle Vektoren des Komplements $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{E}_1$ linear abhängig.

Ist umgekehrt $\mathfrak{E}_1$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{E}$ und sind alle Vektoren des Komplements $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1$ von den Vektoren aus $\mathfrak{E}_1$ linear abhängig, so sind auch alle Vektoren aus $\mathfrak{E}$ von den Vektoren aus $\mathfrak{E}_1$ linear abhängig. Wir wissen nämlich schon, daß jeder Vektor aus einer Menge von Vektoren von den Vektoren dieser Menge linear abhängig ist. Es ist also $\mathfrak{E} \subseteqq L(\mathfrak{E}_1)$, und nach § 2, Nr. 6, Aufgabe 5 gilt $L(\mathfrak{E}) \subseteqq L(L(\mathfrak{E}_1))$. Da $L(\mathfrak{E}_1)$ ein linearer Teilraum und $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem von V ist, gilt $V = L(\mathfrak{E})$ und $L(\mathfrak{E}) = L(\mathfrak{E}_1)$, d. h., $\mathfrak{E}_1$ ist ein Erzeugendensystem von V. Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

I. *Eine Teilmenge $\mathfrak{E}_1$ eines Erzeugendensystems $\mathfrak{E}$ des Vektorraumes V ist dann und nur dann ebenfalls ein Erzeugendensystem von V, wenn alle Vektoren des Komplements $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{E}_1$ linear abhängig sind.*

Das Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$ des linearen Vektorraumes V läßt sich also genau dann verkleinern, wenn es in $\mathfrak{E}$ einen Vektor $\boldsymbol{x}$ gibt, der von den übrigen Vektoren linear abhängig ist. Setzen wir dann $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$, so ist $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1 = \{\boldsymbol{x}\}$, und nach Satz I ist $\mathfrak{E}_1$ ein Erzeugendensystem von V.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge von Vektoren aus V, so sagen wir, *der Vektor $\boldsymbol{y}$ ist linear unabhängig von den Vektoren aus $\mathfrak{A}$*, wenn $\boldsymbol{y}$ von den Vektoren aus $\mathfrak{A}$ nicht linear abhängig ist.

Ist $\mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraumes V mit der Eigenschaft, daß jeder Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{E}$ von den übrigen Vektoren aus $\mathfrak{E}$, d. h. von den Vektoren der Menge $\mathfrak{E} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$, linear unabhängig ist, so läßt sich das Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$ nicht mehr verkleinern.

Ein Erzeugendensystem $\mathfrak{B}$ eines linearen Vektorraumes V, das sich nicht mehr verkleinern läßt, heißt eine *Basis des linearen Vektorraumes V*.

Aus Satz I erhalten wir durch diese Überlegungen die folgenden Charakterisierungen einer Basis.

I'. *Ein Erzeugendensystem $\mathfrak{B}$ des Vektorraumes V ist dann und nur dann eine Basis, wenn jeder Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{B}$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{B} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ linear unabhängig ist.*

I''. *Ein Erzeugendensystem $\mathfrak{B}$ des Vektorraumes V ist genau dann eine Basis, wenn die lineare Hülle jeder echten Teilmenge von $\mathfrak{B}$ ein echter Teilraum von V ist.*

Ein linearer Vektorraum V, der ein endliches Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$ besitzt, heißt *endlich erzeugbar*. Wir beweisen den Satz

II. *Jeder endlich erzeugbare Vektorraum V besitzt eine endliche Basis $\mathfrak{B}$.*

Es sei $\mathfrak{E}$ ein endliches Erzeugendensystem von V, das aus n Vektoren besteht. Ist $\mathfrak{E}$ eine Basis, so ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{E}$ keine Basis, so gibt es einen Vektor $x \in \mathfrak{E}$, der von den Vektoren aus $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} \setminus \{x\}$ linear abhängig ist. Die Menge $\mathfrak{E}_1$ ist dann ein Erzeugendensystem von V, das aus $n - 1$ Vektoren besteht. Ist $\mathfrak{E}_1$ eine Basis, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls gibt es einen Vektor $y \in \mathfrak{E}_1$, der von den Vektoren aus $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 \setminus \{y\}$ linear abhängig ist, und die Menge $\mathfrak{E}_2$ ist ein Erzeugendensystem von V, das aus $n - 2$ Vektoren besteht. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen und muß nach endlich vielen, etwa $m \leqq n$ Schritten zum Abschluß kommen. Die Menge $\mathfrak{E}_m$ ist dann eine Basis, die aus $n - m$ Vektoren besteht.

Betrachten wir den Beweis zum Satz II etwas näher, so stellen wir fest, daß wir das Ergebnis auch wie folgt formulieren können:

II'. *Jedes endliche Erzeugendensystem eines endlich erzeugbaren Vektorraumes enthält eine endliche Basis.*

Diese Formulierung ist schärfer als die im Satz II angegebene. Wurde im Satz II lediglich die Existenz einer endlichen Basis schlechthin behauptet, so besagt Satz II', daß jedes endliche Erzeugendensystem eine solche Basis enthält.

1°. Als Beispiel betrachten wir den Vektorraum $V = R^n$ der n-tupel reeller Zahlen. In § 2, Nr. 5, Beispiel 7° haben wir festgestellt, daß die Menge $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ mit $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})$ ($j = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ij} bezeichnet das Kronecker-Symbol) ein Erzeugendensystem von R^n ist. Da $\mathfrak{E}$ nur aus endlich vielen Elementen besteht, ist $\mathfrak{E}$ ein endliches Erzeugendensystem des Vektorraumes R^n. Es sei $\mathfrak{E}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) diejenige Teilmenge von $\mathfrak{E}$, in der der Vektor e_j fehlt. Der von $\mathfrak{E}_j$ erzeugte Vektorraum $V_j = L(\mathfrak{E}_j)$ besteht aus allen Linearkombinationen der Vektoren $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$. Damit enthält V_j alle und nur die n-tupel $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, für die $\xi_j = 0$ ist. V_j ist für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ ein echter Teilraum von R^n, und die Menge $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis des Vektorraumes R^n. Man nennt $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die *kanonische Basis des linearen Vektorraumes* R^n.

3. LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

In diesem Abschnitt wird der zur Charakterisierung einer Basis wesentliche Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren näher untersucht. Wir beginnen mit einer Definition: Die Vektoren einer Menge $\mathfrak{A}$, die nicht leer ist und nicht nur aus dem Nullvektor besteht, heißen *linear unabhängig*, wenn jeder Vektor $x \in \mathfrak{A}$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A} \setminus \{x\}$ linear unabhängig ist. Andernfalls sprechen wir von *linear abhängigen* Vektoren. Der Satz I' erhält damit folgende einfache Formulierung:

I'''. *Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, dessen Vektoren linear unabhängig sind und umgekehrt.*

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Wir betrachten eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$. Ist x ein Vektor aus $\mathfrak{A}_1$, so ist x von den Vektoren aus $\mathfrak{A} \setminus \{x\}$, also auch von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1 \setminus \{x\}$ linear unabhängig. Da dies für jeden Vektor $x \in \mathfrak{A}_1$ gilt, erhalten wir:

III. *Jede nicht leere Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ einer Menge $\mathfrak{A}$ von linear unabhängigen Vektoren ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.*

Insbesondere sind also die Vektoren jeder endlichen Teilmenge einer Menge von linear unabhängigen Vektoren linear unabhängig. Diese Aussage läßt sich umkehren:

IV. *Sind die Vektoren jeder endlichen Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ einer Menge $\mathfrak{A}$ linear unabhängig, so ist $\mathfrak{A}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren.*

Den Beweis führen wir indirekt und nehmen an, daß die Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ linear abhängig sind. Dann gibt es einen Vektor $x \in \mathfrak{A}$, der von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A} \setminus \{x\}$ linear abhängig ist. Es gibt also endlich viele Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus der Menge $\mathfrak{A} \setminus \{x\}$, von denen x linear abhängig ist. Die Vektoren der endlichen Teilmenge $\mathfrak{A}_1 = \{x, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von $\mathfrak{A}$ sind dann aber nicht linear unabhängig im Widerspruch zur Voraussetzung.

Suchen wir ein Kriterium, das uns gestattet, die lineare Unabhängigkeit der Vektoren einer gegebenen Menge zu prüfen, so können wir uns nach Satz IV auf endliche Mengen beschränken.

Ist $\mathfrak{A}_1$ eine endliche Menge von Vektoren, die nicht linear unabhängig sind, so gibt es einen Vektor $x \in \mathfrak{A}_1$, der von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1 \setminus \{x\}$ abhängt. Die Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1 \setminus \{x\}$ bezeichnen wir mit $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, so daß $\mathfrak{A}_1$ aus den m Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x$ besteht. Da x von den Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ linear abhängt, gibt es reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, so daß

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{m-1} x_{m-1} \tag{1}$$

ist. Setzen wir $x_m = x$ und $\alpha_m = -1$, so können wir (1) in der Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m x_m = o \tag{2}$$

schreiben und erhalten:

Sind die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ linear abhängig, so gibt es m reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$, die nicht alle gleich Null sind (es ist $\alpha_m = -1$!), *so daß die Gleichung* (2) *gilt.* Wir nehmen nun umgekehrt an, daß zu den gegebenen Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$ m reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ existieren, die nicht alle gleich Null sind, so daß die Gleichung (2) gilt. Die Indizierung der Vektoren und der reellen

Zahlen wählen wir so, daß $\alpha_m \neq 0$ ist. Dann können wir die Gleichung (2) durch $-\alpha_m$ dividieren und finden

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\boldsymbol{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m}\boldsymbol{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\boldsymbol{x}_{m-1} - \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}.$$

Setzen wir $-\frac{\alpha_1}{\alpha_m} = \beta_1,\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_m} = \beta_2, \ldots, -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = \beta_{m-1}$ und addieren auf beiden Seiten dieser Gleichung den Vektor $\boldsymbol{x}_m$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{x}_m = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \beta_{m-1}\boldsymbol{x}_{m-1}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{x}_m$ ist also von den Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$ linear abhängig, und es gilt:

Besteht zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ *eine Gleichung der Form* (2), *wobei nicht alle Koeffizienten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *gleich Null sind, so sind diese Vektoren linear abhängig.*

Unsere Ergebnisse fassen wir zu dem folgenden Kriterium zusammen:

V. *Die Vektoren* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ *sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn aus der Gleichung*

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o} \tag{2}$$

folgt, daß alle Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *verschwinden.*

Wir betrachten ein Beispiel.

2°. Es sei R^2 der Vektorraum der Paare (ξ_1, ξ_2) reeller Zahlen. Sind die beiden Vektoren (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) linear abhängig, so gibt es zwei reelle Zahlen α, β, von denen wenigstens eine, etwa α, von Null verschieden ist, so daß

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) + \beta(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$$

gilt. Dividieren wir diese Gleichung durch α und setzen $-\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$, so ergibt eine einfache Umformung

$$(\xi_1, \xi_2) = \gamma(\eta_1, \eta_2).$$

Das bedeutet, es ist $\xi_1 = \gamma \cdot \eta_1$ und $\xi_2 = \gamma \cdot \eta_2$. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit η_2, die zweite mit η_1, so ergibt sich

$$\xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1 = 0. \tag{3}$$

Es seien nun umgekehrt (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) zwei Vektoren aus dem Vektorraum R^2, für die die Gleichung (3) gilt. Ist $\eta_1 = \eta_2 = 0$, so ist $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$ der Nullvektor, und die Vektoren (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) sind linear abhängig.

Ist etwa $\eta_1 \neq 0$, so setzen wir $\beta = \frac{\xi_1}{\eta_1}$. Dann ist $\beta \cdot \eta_1 - \xi_1 = 0$, und wenn wir die Gleichung (3) durch η_1 dividieren, so erhalten wir $\beta \cdot \eta_2 - \xi_2 = 0$. Setzen wir $\alpha = -1$, so ist $\alpha \neq 0$, und es gelten die Gleichungen

$$\alpha \cdot \xi_1 + \beta \cdot \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \xi_2 + \beta \cdot \eta_2 = 0,$$

die der Gleichung

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) + \beta(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$$

gleichwertig sind. Die Vektoren (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) sind also linear abhängig.

Zwei Vektoren (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) des Vektorraumes R^2 sind dann und nur dann linear abhängig, wenn $\xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1 = 0$ ist.

Zwei Vektoren (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) des Vektorraumes R^2 sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn $\xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1 \neq 0$ ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts beweisen wir folgenden Satz, den wir im nächsten Abschnitt benutzen:

VI. *Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren und ist der Vektor $\boldsymbol{x}$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ linear unabhängig, so ist $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \cup \{\boldsymbol{x}\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren.*

Zum Beweis betrachten wir eine beliebige endliche Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}_0$. Gehört $\boldsymbol{x}$ nicht zu der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ (wir schreiben dafür $\boldsymbol{x} \notin \mathfrak{A}_1$), so ist $\mathfrak{A}_1$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$, und nach Satz III sind die Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ linear unabhängig. Ist $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}_1$, so bezeichnen wir die Vektoren von $\mathfrak{A}_1$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$ und betrachten die Gleichung

$$\alpha \boldsymbol{x} + \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{o}. \tag{4}$$

Ist $\alpha \neq 0$, so können wir durch $-\alpha$ dividieren und erhalten

$$-\boldsymbol{x} - \frac{\alpha_1}{\alpha} \boldsymbol{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \boldsymbol{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha} \boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{o}.$$

Setzen wir $-\frac{\alpha_1}{\alpha} = \beta_1, -\frac{\alpha_2}{\alpha} = \beta_2, \ldots, \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha} = \beta_{m-1}$ und addieren auf beiden Seiten den Vektor $\boldsymbol{x}$, so gilt

$$\boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \beta_{m-1} \boldsymbol{x}_{m-1}.$$

Damit wäre der Vektor $\boldsymbol{x}$ von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1 \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ und folglich von den Vektoren der größeren Menge $\mathfrak{A}_0 \setminus \{\boldsymbol{x}\} = \mathfrak{A}$ linear abhängig, was der Voraussetzung widerspricht. Es ist also $\alpha = 0$. Dann erhält die Gleichung (4) aber die Form

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \boldsymbol{x}_{m-1} = \boldsymbol{o}.$$

Da die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$ eine endliche Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ bilden, folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0,$$

und nach Satz V sind die Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$ der Menge $\mathfrak{A}_1$ linear unabhängig. Da $\mathfrak{A}_1$ als beliebige endliche Teilmenge der Menge $\mathfrak{A}_0$ gewählt war, ist $\mathfrak{A}_0$ nach Satz IV eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.

4. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN BEGRIFFEN BASIS UND LINEARE UNABHÄNGIGKEIT; DER AUSTAUSCHSATZ

Nachdem wir den Begriff der linearen Unabhängigkeit näher kennengelernt haben, wollen wir nun die Beziehungen zwischen diesem Begriff und dem der Basis untersuchen. Wir beweisen:

VII. *Eine Basis eines linearen Vektorraumes ist eine größte Menge linear unabhängiger Vektoren.*

Anders ausgedrückt: *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine Basis des linearen Vektorraumes* V, *so sind die Vektoren aus* $\mathfrak{B}$ *linear unabhängig, während die Vektoren jeder größeren Menge, die* $\mathfrak{B}$ *echt enthält, linear abhängig sind.*

Wir haben schon in Nr. 3 festgestellt, daß die Vektoren einer Basis $\mathfrak{B}$ linear unabhängig sind. Überdies ist eine Basis $\mathfrak{B}$ von V ein Erzeugendensystem des Vektorraumes V, es gilt also $L(\mathfrak{B}) = V$. Das bedeutet aber: Jeder Vektor $y \in V$ ist von den Vektoren aus $\mathfrak{B}$ linear abhängig. Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge von Vektoren, die $\mathfrak{B}$ echt umfaßt, so gibt es in $\mathfrak{A}$ einen Vektor $y \in V$, der nicht in $\mathfrak{B}$ liegt. Infolgedessen ist $\mathfrak{B}$ in der Menge $\mathfrak{A} \setminus \{y\}$ enthalten, und da y von den Vektoren aus $\mathfrak{B}$ linear abhängig ist, ist y auch von den Vektoren aus $\mathfrak{A} \setminus \{y\}$ linear abhängig. Folglich sind die Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ linear abhängig.

Beschränken wir uns auf die Betrachtung endlich erzeugbarer Vektorräume, so wissen wir, daß in diesen Vektorräumen eine endliche Basis existiert. Im Satz I′ konnten wir den Satz von der Existenz einer endlichen Basis in gewisser Weise verschärfen, und wir beweisen jetzt eine analoge Verschärfung in anderer Richtung:

VIII. *Jede endliche Menge* $\mathfrak{A}_1$ *von linear unabhängigen Vektoren eines endlich erzeugbaren Vektorraumes* V *läßt sich zu einer endlichen Basis von* V *ergänzen.*

Zum Beweis benutzen wir den sogenannten

Austauschsatz (Steinitz): *Es sei* V *ein linearer Vektorraum,* $\mathfrak{E}$ *ein Erzeugendensystem von* V *und* $\mathfrak{A}_1$ *eine Menge von* m *linear unabhängigen Vektoren aus* V. *Dann gibt es eine Teilmenge* $\mathfrak{E}_1$ *des Erzeugendensystems* $\mathfrak{E}$, *die ebenfalls* m *Vektoren enthält, so daß die Menge* $\mathfrak{E}' = (\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1) \cup \mathfrak{A}_1$, *die aus der Menge* $\mathfrak{E}$ *dadurch entsteht, daß man die Vektoren der Teilmenge* $\mathfrak{E}_1$ *durch die Vektoren der Menge* $\mathfrak{A}_1$ *austauscht, ein Erzeugendensystem von* V *ist.*

Wir beweisen den Satz VIII.

Es sei $\mathfrak{E}$ ein endliches Erzeugendensystem des endlich erzeugbaren Vektorraumes V. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{E}$ aus n Vektoren besteht, während die Menge $\mathfrak{A}_1$ von den m Vektoren $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gebildet wird. Es sei $\mathfrak{E}_1$ die im Austauschsatz genannte Teilmenge von $\mathfrak{E}$, die m Vektoren enthält. Wir bezeichnen die Vektoren aus $\mathfrak{E}$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wobei die ersten m Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Menge $\mathfrak{E}_1$ bilden.

Aus dem Austauschsatz folgt zunächst, daß $m \leqq n$ ist. Ist $m = n$, so ist $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}' = (\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1) \cup \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1$. Dann ist $\mathfrak{A}_1$ ein endliches Erzeugendensystem von V, und da die Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ linear unabhängig sind, ist $\mathfrak{A}_1$ eine endliche Basis von V. Es sei also $m < n$. Dann besteht die Menge $\mathfrak{E}' = (\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_1) \cup \mathfrak{A}_1$ aus den Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{x}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, und diese Vektoren erzeugen den linearen Vektorraum V. Sind alle Vektoren $\boldsymbol{x}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ linear abhängig von den Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$, so bilden die Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ schon ein Erzeugendensystem von V, und da sie linear unabhängig sind, eine Basis von V. Wir nehmen an, es gibt einen Vektor $\boldsymbol{x}_i$ $(m + 1 \leqq i \leqq n)$, der von den Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ linear unabhängig ist. Nach Satz VI sind dann die Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{x}_i$ linear unabhängig. Wir setzen $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_{m+1}$ und erhalten eine Menge $\mathfrak{A}_2$ von $m + 1$ linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}_{m+1}$, die in dem Erzeugendensystem $\mathfrak{E}'$ enthalten ist. Ist $\mathfrak{A}_2$ ein Erzeugendensystem, so ist $\mathfrak{A}_2$ eine endliche Basis von V, da die Vektoren aus der Menge $\mathfrak{A}_2$ linear unabhängig sind. Dann ist unser Satz bewiesen. Ist $\mathfrak{A}_2$ kein Erzeugendensystem, so gibt es einen Vektor $\boldsymbol{x}_j$ $(m + 1 \leqq j \leqq n)$ aus der Menge $\mathfrak{E}'$, der von den Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_2$ linear unabhängig ist. Wir setzen $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}_{m+2}$ und erhalten eine Menge $\mathfrak{A}_3$ von $m + 2$ linear unabhängigen Vektoren, die in der Menge $\mathfrak{E}'$ enthalten ist. Die Fortsetzung dieses Verfahrens bricht nach endlich vielen, etwa k Schritten ab, und wir erhalten eine Menge $\mathfrak{A}_{k+1}$, die aus $m + k \leqq n$ linear unabhängigen Vektoren besteht und ein Erzeugendensystem von V ist. Die Menge $\mathfrak{A}_{k+1}$ ist eine endliche Basis des Vektorraumes V, die die gegebene Menge $\mathfrak{A}_1$ von m linear unabhängigen Vektoren enthält.

Zum Schluß beweisen wir den Austauschsatz, den wir auch in den folgenden Paragraphen verwenden werden. Der Beweis wird durch Induktion über die Anzahl m der Elemente von $\mathfrak{A}_1$ geführt.

Für $m = 0$ ist nichts zu beweisen. Wir nehmen an, daß der Austauschsatz für alle Mengen $\mathfrak{A}_2$ von $m - 1$ linear unabhängigen Vektoren richtig ist. Sind $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ die linear unabhängigen Vektoren der Menge $\mathfrak{A}_1$, so sind die Vektoren $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_{m-1}$ linear unabhängig und bilden eine Menge $\mathfrak{A}_2$, auf die die Induktionsannahme zutrifft. Es gibt also eine Teilmenge $\mathfrak{E}_2$ von $m - 1$ Vektoren in $\mathfrak{E}$ mit folgender Eigenschaft: Bezeichnet $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{E}_2$ die Menge derjenigen Vektoren aus $\mathfrak{E}$, die nicht in $\mathfrak{E}_2$ liegen, so ist $\mathfrak{E}'' = \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{A}_2$ ein Erzeugendensystem von V. Es gilt $\boldsymbol{y}_m \in V = L(\mathfrak{E}'')$, d. h., es gibt endlich viele Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ aus $\mathfrak{E}''$ und endlich viele reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, so daß

$$\boldsymbol{y}_m = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k$$

ist. Wären alle Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ aus der Menge $\mathfrak{A}_2$, so wären die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_m$ aus $\mathfrak{A}_1$, und aus der Gleichung

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + (-1)\, \boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{o}$$

würde sich eine lineare Abhängigkeit der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$ ergeben. Da dies unserer

Voraussetzung widerspricht, gibt es unter den Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wenigstens einen, den wir x_{j_0} nennen, der nicht in $\mathfrak{A}_2$, also in $\mathfrak{F}_2$ liegt und dessen Koeffizient $\alpha_{j_0} \neq 0$ ist. Wäre $\alpha_{j_0} = 0$, so könnten wir x_{j_0} aus der Darstellung des Vektors y_m als Linearkombination von Vektoren aus $\mathfrak{E}''$ fortlassen, und nach den obigen Überlegungen erhielten wir abermals einen Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren aus $\mathfrak{A}_1$. Es gilt also

$$y_m = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{j_0} x_{j_0} + \cdots + \alpha_k x_k; \quad \alpha_{j_0} \neq 0.$$

Eine einfache Umformung dieser Gleichung ergibt

$$x_{j_0} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{j_0}} x_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j_0-1}}{\alpha_{j_0}} x_{j_0-1} - \frac{\alpha_{j_0+1}}{\alpha_{j_0}} x_{j_0+1} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{j_0}} x_k + \frac{1}{\alpha_{j_0}} y_m.$$

Ist $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 \setminus \{x_{j_0}\}$, so ist offenbar $x_{j_0} \in L(\{y_m\} \cup \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{F}_1) = L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_1)$. Dann gilt aber

$$L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_1) = L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_1 \cup \{x_{j_0}\}) = L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \supseteqq L(\mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{F}_2) = V,$$

und folglich ist

$$L(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_1) = V.$$

Die Menge $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{F}_1$ ist ein Erzeugendensystem von V, das aus dem Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$ dadurch hervorgeht, daß die Menge $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \cup \{x_{j_0}\}$ die aus m Vektoren besteht, durch die Menge $\mathfrak{A}_1$ von m gegebenen linear unabhängigen Vektoren ersetzt ist. Damit ist der Austauschsatz bewiesen.

5. AUFGABEN

1. Man bestimme eine Basis des Vektorraumes der komplexen Zahlen (§ 1, Nr. 7, Aufgabe 1).

2. Es sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge. Man bestimme eine Basis des Vektorraumes $R(\mathfrak{M})$ (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiel 4⁰).

3. Man gebe eine Basis für die in § 1, Nr. 3, Beispiel 6^0 und 7^0 angegebenen Vektorräume an.

4. Man prüfe die folgenden Mengen von Vektoren auf ihre lineare Abhängigkeit und bestimme linear unabhängige Teilmengen:

   a) (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) im R^4,

   b) (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) im R^3.

5. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Vektoren eines linearen Vektorraumes, die den Nullvektor enthält, ist stets eine Menge von linear abhängigen Vektoren.

6. Zwei Vektoren $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ aus dem Vektorraum R^n sind genau dann linear unabhängig, wenn es zwei Indizes i, j $(1 \leqq i < j \leqq n)$ gibt, so daß $\xi_i \cdot \eta_j - \xi_j \cdot \eta_i \neq 0$ ist.

7.* Es sei R^3 der Vektorraum der Tripel (ξ_1, ξ_2, ξ_3) reeller Zahlen. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei feste reelle Zahlen, so bilden alle Tripel (ξ_1, ξ_2, ξ_3), die der Gleichung $\alpha_1 \cdot \xi_1 + \alpha_2 \cdot \xi_2 + \alpha_3 \cdot \xi_3 = 0$ genügen, einen Teilraum W von R^3 (vgl. § 2, Nr. 3, Beispiel 2^0). Man bestimme eine Basis dieses Teilraumes und veranschauliche sich die Verhältnisse im dreidimensionalen Raum mit Hilfe der in § 3, Nr. 4 angegebenen Abbildung.

8.* Man beweise den Satz VIII, ohne den Austauschsatz zu benutzen.

§ 5. ENDLICHDIMENSIONALE VEKTORRÄUME

1. EINLEITUNG

Im § 4 haben wir uns an einigen Stellen auf die Betrachtung endlich erzeugbarer linearer Vektorräume beschränkt. Dies geschah vor allem, weil sich die Beweise der betreffenden Sätze einfacher gestalten. Es muß hier darauf hingewiesen werden, daß der Satz von der Existenz einer Basis auch für nicht endlich erzeugbare Vektorräume gilt. Der Beweis dieses Satzes erfordert dann aber weitgehende Voraussetzungen aus der Mengenlehre.

Die Struktur der endlich erzeugbaren linearen Vektorräume ist in vieler Hinsicht besonders einfach, außerdem besitzen diese Vektorräume den Vorzug einer größeren Anschaulichkeit. Da viele wichtige lineare Vektorräume, wie z. B. die Vektorräume der ebenen und räumlichen Translationen, der Vektorraum R^n und seine Teilräume, endlich erzeugbare Vektorräume sind, beschäftigen wir uns in diesem und den beiden folgenden Paragraphen mit der näheren Untersuchung dieser Klasse von Vektorräumen. Wir werden dabei auf diejenigen Ergebnisse, die nicht nur für endlich erzeugbare Vektorräume gelten, besonders hinweisen. Die allgemeine Theorie der linearen Vektorräume, die auch die nicht endlich erzeugbaren Vektorräume umfaßt, wird im § 8 wieder aufgenommen.

2. DIE DIMENSION

Es sei V ein endlich erzeugbarer linearer Vektorraum. Nach § 4, Nr. 2, Satz II besitzt der Vektorraum V eine endliche Basis, und wir wollen verschiedene Basen des Vektorraumes V miteinander vergleichen. Wir beweisen den folgenden Satz:

I. *Ist V ein endlich erzeugbarer Vektorraum, so ist jede Basis $\mathfrak{B}$ von V endlich,* und *alle Basen bestehen aus der gleichen Anzahl von Vektoren.*

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir den am Schluß von § 4 bewiesenen Austauschsatz. Da der Vektorraum V endlich erzeugbar ist, besitzt er eine endliche Basis $\mathfrak{B}_0$, die aus n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestehe. Es sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Basis, dann sind je endlich viele Vektoren aus $\mathfrak{B}$ linear unabhängig, und da $\mathfrak{B}_0$ ein Erzeugendensystem von V ist, können wir den Austauschsatz anwenden. Sind die Vektoren $y_1, y_2, \ldots, y_m$ aus $\mathfrak{B}$, so gibt es m Vektoren aus $\mathfrak{B}_0$, gegen die die Vektoren $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ausgetauscht werden können. Daraus folgt zunächst, daß $\mathfrak{B}$ nicht mehr als n Vektoren enthalten kann. Die Basis $\mathfrak{B}$ ist also endlich und enthält höchstens soviel Vektoren wie die Basis $\mathfrak{B}_0$. Nun können wir aber die Rollen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_0$ in den obigen Überlegungen vertauschen, und es ergibt sich, daß die Basis $\mathfrak{B}_0$ höchstens so viele Vektoren wie die Basis $\mathfrak{B}$ enthält. Also besteht die Basis $\mathfrak{B}$ aus der gleichen

Anzahl von Vektoren wie die Basis $\mathfrak{B}_0$, und damit enthalten alle Basen von V die gleiche Anzahl von Vektoren.

Dieser Satz berechtigt uns zu folgender Definition:

Ist V ein endlich erzeugbarer Vektorraum, so heißt die Anzahl der Vektoren einer Basis von V die *Dimension des Vektorraumes V* und wird mit dim V bezeichnet.[1])

Aus Satz I folgt insbesondere: *Die Dimension eines endlich erzeugbaren Vektorraumes V ist endlich,* und wir nennen V einen *endlichdimensionalen Vektorraum.* Ist der Vektorraum V nicht endlich erzeugbar, so kann er auch keine endliche Basis besitzen und wird *unendlichdimensionaler Vektorraum* genannt.

II. *Ist V ein Vektorraum der Dimension n, so sind je n + 1 Vektoren aus V linear abhängig.*

Gäbe es nämlich $n + 1$ linear unabhängige Vektoren aus V, so ließen sich diese nach § 4, Nr. 4, Satz VIII zu einer Basis von V ergänzen, die im Widerspruch zu Satz I aus mehr als n Vektoren bestehen würde.

III. *In einem Vektorraum V der Dimension n bilden je n linear unabhängige Vektoren eine Basis.*

Es sei $\mathfrak{A}_1$ eine Menge aus n linear unabhängigen Vektoren, die wir nach § 4, Nr. 4, Satz VIII zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von V ergänzen können. Da je $n + 1$ Vektoren aus V linear abhängig sind, kann die Basis $\mathfrak{B}$ höchstens n Vektoren enthalten. Dann ist aber $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1$, und $\mathfrak{A}_1$ ist eine Basis von V.

Aus diesen Sätzen und aus § 4, Nr. 4, Satz VII erhalten wir die folgende Charakterisierung eines linearen Vektorraumes der Dimension n oder, wie wir auch sagen wollen, eines *n-dimensionalen Vektorraumes*:

IV. *Ein linearer Vektorraum V ist dann und nur dann n-dimensional, wenn es n linear unabhängige Vektoren in V gibt, während je n + 1 Vektoren linear abhängig sind.*

Für die unendlichdimensionalen Vektorräume ergibt sich damit:

V. *Ein linearer Vektorraum V ist dann und nur dann unendlichdimensional, wenn es in V eine unendliche Menge von linear unabhängigen Vektoren gibt.*

1°. Nach § 4, Nr. 2, Beispiel 1° bilden die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mit $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})$ eine Basis des Vektorraumes R^n. Es gilt dim $R^n = n$. *R^n ist ein n-dimensionaler Vektorraum.*

2°. Der Vektorraum R^∞ ist unendlichdimensional. Es sei $\mathfrak{A} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ die Menge der in § 2, Nr. 5, Beispiel 8° angegebenen Vektoren $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,2,\ldots}$. *Die Vektoren der Menge $\mathfrak{A}$ sind linear unabhängig.* Sind $e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_m}$ endlich viele verschiedene Vektoren aus $\mathfrak{A}$ so ist

$$\alpha_{j_1} e_{j_1} + \alpha_{j_2} e_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_m} e_{j_m}$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 31. Ist $V = \{o\}$, so setzt man dim $V = 0$. Der Leser überlege sich, daß dann die Sätze II–IV für $V = \{o\}$ formal richtig sind.

derjenige Vektor $(\xi_i)_{i=1,2,\ldots}$, für den

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha_{j_\mu} & \text{für} \quad i = j_\mu \ (\mu = 1, 2, \ldots, m), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Dieser Vektor $(\xi_i)_{i=1,2,\ldots}$ ist genau dann der Nullvektor, wenn $\alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \cdots = \alpha_{j_m} = 0$ ist.

Wir haben gezeigt, daß $\mathfrak{A}$ eine unendliche Menge linear unabhängiger Vektoren aus R^∞ ist, und nach Satz V *ist R^∞ ein unendlichdimensionaler Vektorraum.*

3. KOORDINATEN; DIE ABBILDUNG $\Phi_{\mathfrak{B}}$

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Vektoren eines endlichdimensionalen Vektorraumes mit Hilfe einer festen Basis. Dazu ist es zweckmäßig, die Anordnung der Basiselemente in den Begriff „Basis" einzubeziehen. Im folgenden verstehen wir unter einer Basis $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ des n-dimensionalen Vektorraumes V das n-tupel der linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Wir werden feststellen, daß sich jeder Vektor eines n-dimensionalen Vektorraumes V nach Wahl einer Basis in V durch n reelle Zahlen, seine Koordinaten, bestimmen läßt. Dabei entspricht dem Rechnen mit Vektoren aus V das Rechnen mit den zugeordneten Koordinaten-n-tupeln. Dies ermöglicht eine „analytische", d. h. durch das Rechnen mit reellen Zahlen charakterisierte Behandlung von Fragestellungen aus der Theorie der endlichdimensionalen linearen Vektorräume.

Es sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum und $\mathfrak{B}$ eine Basis von V. Die Vektoren der Menge $\mathfrak{B}$ nennen wir *Basisvektoren* und bezeichnen sie mit $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Ist $\boldsymbol{y}$ ein beliebiger Vektor aus V, so ist $\boldsymbol{y}$ von den Basisvektoren linear abhängig. Es gibt n reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so daß

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \tag{1}$$

ist. Wir weisen nach, daß die reellen Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in der Gleichung (1) durch den Vektor $\boldsymbol{y}$ eindeutig bestimmt sind. Dazu betrachten wir eine beliebige Darstellung des Vektors $\boldsymbol{y}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, die wir in der Form

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{x}_n \tag{1'}$$

schreiben. Subtrahieren wir die Gleichung (1') von der Gleichung (1), so erhalten wir

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, \boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, \boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\, \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}. \tag{2}$$

Da die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ linear unabhängig sind, folgt aus der Gleichung (2) das Verschwinden aller Koeffizienten. Es ist

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

oder

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Das Ergebnis fassen wir in folgendem Satz zusammen:

VI. *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V, so entsprechen jedem Vektor $y \in V$ eindeutig n reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so daß*

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \tag{1}$$

ist.

Die reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heißen die *Koordinaten des Vektors y in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$.*

Fassen wir die Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des gegebenen Vektors y zu einem n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ reeller Zahlen zusammen, so ist dieses n-tupel ein Element des Vektorraumes R^n. Wir können also jedem Vektor $y \in V$ einen Vektor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ aus R^n zuordnen, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Koordinaten von y in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ sind. Auf diese Weise haben wir eine Abbildung von V in R^n erklärt, die wir mit $\Phi_{\mathfrak{B}}$ bezeichnen. Es gilt

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(y) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \text{für} \quad y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n .$$

VII. *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, $\mathfrak{B}$ eine Basis von V und $\Phi_{\mathfrak{B}}$ diejenige Abbildung, die jedem Vektor $y \in V$ das n-tupel seiner Koordinaten in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ zuordnet, so ist $\Phi_{\mathfrak{B}}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Vektorraumes V auf den Vektorraum R^n mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Sind y, z Vektoren aus V, so gilt*

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(y + z) = \Phi_{\mathfrak{B}}(y) + \Phi_{\mathfrak{B}}(z);$$

2. *ist $y \in V$ und α eine reelle Zahl, so gilt*

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(\alpha y) = \alpha \Phi_{\mathfrak{B}}(y).$$

Eine Abbildung eines Vektorraumes V in einen Vektorraum V', die die Eigenschaften 1 und 2 besitzt, heißt *lineare Abbildung*. Eine *umkehrbar eindeutige* lineare Abbildung eines Vektorraumes V *auf* einen Vektorraum V' heißt ein *Isomorphismus* des Vektorraumes V auf den Vektorraum V'. Den Satz VII können wir damit wie folgt formulieren:

VII′. *Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$, die jedem Vektor y eines n-dimensionalen Vektorraumes V das n-tupel seiner Koordinaten in bezug auf eine feste Basis $\mathfrak{B}$ von V zuordnet, ist ein Isomorphismus von V auf den Vektorraum R^n.*

Den Beweis dieses Satzes führen wir in mehreren Schritten:

a) $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Es seien y, z Vektoren aus V und $\Phi_{\mathfrak{B}}(y) = \Phi_{\mathfrak{B}}(z)$. Ist $\Phi_{\mathfrak{B}}(y) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $\Phi_{\mathfrak{B}}(z) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, so gilt

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n .$$

Da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ die Koordinaten des Vektors y bzw. z in bezug

auf die Basis $\mathfrak{B}$ sind, ist

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = z,$$

und die erste Behauptung ist bewiesen.

b) $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ist eine Abbildung von V *auf* R^n. Es sei $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ein beliebiger Vektor aus R^n. Dann ist $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$ als Linearkombination der Basisvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein Vektor aus V mit den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Es ist also $\Phi_{\mathfrak{B}}(x) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, d. h., jeder Vektor aus R^n ist Bild eines Vektors aus V.

c) $\Phi_{\mathfrak{B}}$ besitzt die Eigenschaft 1. Es seien y, z aus V und

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n;$$

dann ist

$$y + z = (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) x_n$$

und folglich

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(y + z) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Berücksichtigen wir die Definition der Addition im Vektorraum R^n (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiel 2°), so folgt

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(y + z) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

und aus $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \Phi_{\mathfrak{B}}(y)$ und $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \Phi_{\mathfrak{B}}(z)$ ergibt sich die Behauptung.

d) $\Phi_{\mathfrak{B}}$ besitzt die Eigenschaft 2. Es sei $y \in V$, α eine reelle Zahl und

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Dann ist $\alpha y = (\alpha \cdot \alpha_1) x_1 + (\alpha \cdot \alpha_2) x_2 + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_n) x_n$ und folglich

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(\alpha y) = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n).$$

Nun ist aber $(\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n) = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha \Phi_{\mathfrak{B}}(y)$, was die Behauptung ergibt.

3°. Betrachten wir die in § 4, Nr. 2, Beispiel 1° angegebene kanonische Basis $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ mit $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ des Vektorraumes R^n, so läßt sich jeder Vektor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ in der Form

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

schreiben, und die reellen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sind die Koordinaten des Vektors $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$. Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ist in diesem Fall die identische Abbildung.

Wir betrachten nun eine andere Basis $\mathfrak{B}' = \{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ mit

$$x_j' = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{j-1,j}, \delta_{jj}, \delta_{j+1,j+1}, \ldots, \delta_{nn}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist also

$$x_1' = (1, 1, \ldots, 1), \; x_2' = (0, 1, \ldots, 1), \; \ldots, \; x_n' = (0, \ldots, 0, 1).$$

Zunächst beweisen wir die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, woraus nach Satz III folgt, daß diese Vektoren eine Basis $\mathfrak{B}'$ bilden. Es sei

$$x = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \cdots + \alpha_n x'_n.$$

Dann ist $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_1 = \alpha_1$, $\xi_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \xi_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, allgemein $\xi_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Ist x der Nullvektor im R^n, so ist $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$. Aus $\xi_1 = 0$ folgt $\alpha_1 = 0$. Dann ist $\xi_2 = \alpha_2$, und aus $\xi_2 = 0$ folgt $\alpha_2 = 0$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, daß $\alpha_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ ist. Das bedeutet aber, daß die Vektoren $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ linear unabhängig sind.

Ist wiederum $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und

$$x = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \cdots + \alpha_n x'_n,$$

so entspricht dem Vektor x vermöge der Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}'}$ der Vektor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dabei gelten die Gleichungen

$$\xi_1 = \alpha_1, \ \xi_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \xi_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j, \ldots, \xi_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Löst man diese Gleichungen nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auf, so ergibt sich

$$\alpha_1 = \xi_1, \ \alpha_2 = \xi_2 - \xi_1, \ldots, \alpha_j = \xi_j - \xi_{j-1}, \ldots, \alpha_n = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Es ist also $\Phi_{\mathfrak{B}'}((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = (\xi_1, \xi_2 - \xi_1, \ldots, \xi_n - \xi_{n-1})$, und $\Phi_{\mathfrak{B}'}$ ist eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von R^n auf sich.

4.*[1]) DER ISOMORPHIEBEGRIFF; DIE STRUKTUR n-DIMENSIONALER VEKTORRÄUME$_*$; EINE BEMERKUNG

Der Vektorraum V' heißt *isomorph* zum Vektorraum V, wir schreiben $V' \cong V$, wenn es einen Isomorphismus von V auf V' gibt.

VIII. *Die Isomorphie $V' \cong V$ ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation in der Klasse der Vektorräume. Es gilt*

a) *$V \cong V$ für jeden linearen Vektorraum V;*

b) *aus $V' \cong V$ folgt $V \cong V'$ für je zwei lineare Vektorräume V, V';*

c) *aus $V' \cong V$ und $V'' \cong V'$ folgt $V'' \cong V$ für je drei lineare Vektorräume V, V', V''.*

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten:

a) Die Isomorphie ist *reflexiv*, d. h., jeder Vektorraum V ist zu sich selbst isomorph. Dazu betrachten wir die identische Abbildung Φ_0 des Vektorraumes V auf sich. Ist $y \in V$, so gilt $\Phi_0(y) = y$. Die Abbildung Φ_0 ist offenbar eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V auf sich, und aus den Gleichungen

$$\Phi_0(y + z) = y + z = \Phi_0(y) + \Phi_0(z), \quad \Phi_0(\alpha y) = \alpha y = \alpha \Phi_0(y)$$

folgen die Eigenschaften 1 und 2. Es gilt $V \cong V$.

---

[1]) Einem Leser, der mit dem Begriff der Abbildung wenig vertraut ist, empfehlen wir, das Studium von Nr. 4 zurückzustellen, bis er sich mit den Ideen von §§ 8 und **9 und evtl.** 11 vertraut gemacht hat.

Für die Definition der Isomorphie und den Beweis von Satz VIII sind keinerlei Einschränkungen über die Dimension der betrachteten Vektorräume erforderlich.

b) Die Isomorphie ist *symmetrisch*, d. h., ist V' isomorph zu V, so ist auch V isomorph zu V'. Es sei Φ ein Isomorphismus von V auf V'. Da Φ eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist, gibt es eine inverse Abbildung Φ^{-1}, so daß $\Phi^{-1}(\Phi(y)) = y$ für jedes $y \in V$ gilt. Dabei ist Φ^{-1} eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V' auf V, und wir müssen zeigen, daß Φ^{-1} die Eigenschaften 1 und 2 besitzt. Es seien y', z' zwei Vektoren aus V'. Dann gibt es zwei Vektoren y, z aus V, so daß $y' = \Phi(y)$ und $z' = \Phi(z)$ ist. Wir berechnen jetzt $\Phi^{-1}(y' + z')$. Es gilt

$$\Phi^{-1}(y' + z') = \Phi^{-1}(\Phi(y) + \Phi(z)) = \Phi^{-1}(\Phi(y + z)) = y + z.$$

Andererseits ist

$$y = \Phi^{-1}(\Phi(y)) = \Phi^{-1}(y') \quad \text{und} \quad z = \Phi^{-1}(\Phi(z)) = \Phi^{-1}(z'),$$

d. h. aber

$$\Phi^{-1}(y' + z') = \Phi^{-1}(y') + \Phi^{-1}(z').$$

Entsprechend gilt

$$\Phi^{-1}(\alpha y') = \Phi^{-1}(\alpha\Phi(y)) = \Phi^{-1}(\Phi(\alpha y)) = \alpha y = \alpha\Phi^{-1}(y').$$

Aus $V' \cong V$ folgt $V \cong V'$.

c) Die Isomorphie ist *transitiv*, d. h., ist V' isomorph zu V und V'' isomorph zu V', so ist auch V'' isomorph zu V. Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus Φ von V auf V' und einen Isomorphismus Φ' von V' auf V''. Es sei Φ'' die Nacheinanderausführung von Φ und Φ'. Für $y \in V$ sei also $\Phi''(y) = \Phi'(\Phi(y))$. Dann ist Φ'' eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V auf V'', und wir müssen wiederum die Eigenschaften 1 und 2 verifizieren.

Sind y, z Vektoren aus V, so gilt

$$\Phi''(y + z) = \Phi'(\Phi(y + z)) = \Phi'(\Phi(y) + \Phi(z)) = \Phi'(\Phi(y)) + \Phi'(\Phi(z)) = \Phi''(y) + \Phi''(z)$$

und entsprechend

$$\Phi''(\alpha y) = \Phi'(\Phi(\alpha y)) = \Phi'(\alpha\Phi(y)) = \alpha\Phi'(\Phi(y)) = \alpha\Phi''(y).$$

Aus $V'' \cong V'$ und $V' \cong V$ folgt $V'' \cong V$.

Berücksichtigen wir die im Satz VIII bewiesenen Eigenschaften der Isomorphie, so erhalten wir aus dem Satz VII':

VII''. *Zwei endlichdimensionale lineare Vektorräume gleicher Dimension sind isomorph.*

Es seien V und V' zwei endlichdimensionale Vektorräume und $\dim V = \dim V' = n$. Nach Satz VII' gilt $R^n \cong V$ und $R^n \cong V'$. Auf Grund der Symmetrie der Isomorphie gilt dann auch $V' \cong R^n$, und aus $V' \cong R^n$ und $R^n \cong V$ folgt wegen der Transitivität der Isomorphie $V' \cong V$. *

Bemerkung. Die Sätze VII, VII' (und VII'') könnte man dahingehend verstehen, daß eine Untersuchung der speziellen Vektorräume R^n zum Aufbau einer allgemeinen Theorie der Vektorräume endlicher Dimension ausreichend sei. Ein derartiger Standpunkt führt jedoch zu keiner Vereinfachung der Theorie. Die Isomorphie zwischen einem beliebigen Vektorraum V der Dimension n und dem Vektorraum R^n beruht auf der Auszeichnung einer Basis in V. Um also einen für den Vektorraum R^n bewiesenen Satz auf einen beliebigen Vektorraum V der Dimension n zu übertragen, muß in jedem Falle die Unabhängigkeit der betreffenden Aussage von der speziell gewählten Basis nachgewiesen werden, was die Beweise häufig kompliziert. Die Bedeutung der Sätze VII, VII' (und VII'') liegt nicht so sehr in dieser als in der umgekehrten Richtung. Sie gestatten die Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Vektorräume und der in ihr bewiesenen allgemeinen (und gegenüber Isomorphismen invarianten) Sätze auf die in einem festen Koordinatensystem (z. B. in der Phvsik oder Geometrie) durch reelle Zahlen beschriebenen Gegebenheiten.

5. GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG

Zum Abschluß des Paragraphen betrachten wir den Vektorraum der Translationen in der Ebene (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiel 8⁰).

4⁰. Es sei O ein fester Punkt der Ebene. Ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{W}$ eine Translation, so führt $\mathfrak{x}$ den Punkt O in einen Punkt P der Ebene über. Ist umgekehrt P ein beliebiger Punkt der Ebene, so gibt es genau eine Translation $\mathfrak{x}$, die O in P überführt, die also durch die Strecke $\overrightarrow{OP}$ repräsentiert wird. Wir erhalten eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Vektorraumes $\mathfrak{W}$ auf die Menge der von O ausgehenden gerichteten Strecken.

Der Vektorraum $\mathfrak{W}$ der Translationen der Ebene ist zweidimensional.

Zunächst gibt es zwei Translationen in der Ebene, die verschiedene und nicht entgegengesetzte Richtungen besitzen. Da keine dieser beiden Translationen ein Vielfaches der anderen ist, sind sie linear unabhängig, und die Dimension des Vektorraumes $\mathfrak{W}$ ist mindestens zwei. Andererseits läßt sich jede Translation $\mathfrak{z}$ aus zwei Translationen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die nicht die gleiche oder entgegengesetze

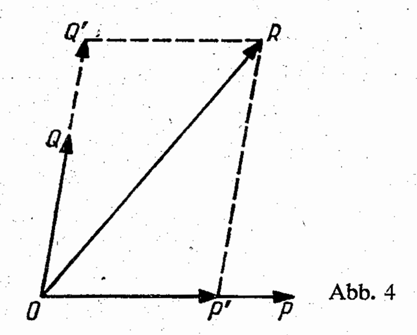


Abb. 4

Richtung haben, linear kombinieren. In Abb. 4 haben wir $\mathfrak{z}$ durch $\overrightarrow{OR}$, $\mathfrak{x}$ durch $\overrightarrow{OP}$ und $\mathfrak{y}$ durch $\overrightarrow{OQ}$ repräsentiert. Dann repräsentieren die Strecken $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OQ'}$ Vielfache von $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{y}$, deren Summe durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OR}$ repräsentiert wird. Bilden die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathfrak{W}$, so nennen wir das Tripel $\{O; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$ ein *Koordinatensystem der Ebene*. Ist R ein beliebiger Punkt der Ebene, so repräsentiert die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OR}$ eine Translation $\mathfrak{z}$, und die Koordinaten (α, β) des Vektors in bezug auf die Basis $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$: $\mathfrak{z} = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}$ nennen wir *Koordinaten des Punktes P* in bezug auf das Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$. Vermöge der eingangs erwähnten umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Translationen aus $\mathfrak{W}$ erhalten wir nach Satz VI eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Elementen von R^2.

6. AUFGABEN

1. Welche Dimension besitzt der Vektorraum der komplexen Zahlen (vgl. § 1, Nr. 7, Aufgabe 1)?

2. Man bestimme die Koordinaten der Vektoren $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, (γ_1, γ_2) des R^2 in bezug auf die aus zwei linear unabhängigen Vektoren (α_1, α_2), (β_1, β_2) gebildete Basis und veranschauliche sich den Sachverhalt in der Ebene.

3. Welche Dimension besitzt der Vektorraum P_n (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiel 7⁰)?

4.* Man zeige, daß der Vektorraum P und die Vektorräume $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ (vgl. § 1, Nr. 3, Beispiele 5⁰ und 6⁰) unendlichdimensional sind.

5. Der Vektorraum $R(\mathfrak{M})$ ist dann und nur dann endlichdimensional, wenn $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge ist, und dann ist dim $R(\mathfrak{M})$ gleich der Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}$.

6. Die im Beispiel 4⁰ angestellten Überlegungen führe man entsprechend für die Translationen im Raum aus.

§ 6. TEILRÄUME ENDLICHDIMENSIONALER VEKTORRÄUME

1. EINLEITUNG

Wie im § 5 beschränken wir uns auf die Betrachtung endlichdimensionaler Vektorräume. Wir untersuchen die Beziehungen zwischen der Dimension eines linearen Teilraumes und der Dimension des ganzen Vektorraumes. In Nr. 3 wird eine wichtige Gleichung für die Dimension des Durchschnitts und der Summe zweier linearer Teilräume abgeleitet. Die Nr. 4, in der die sogenannte direkte Summe linearer Teilräume definiert wird, kann von einem vorwiegend an den Anwendungen interessierten Leser überschlagen werden. Die Definitionen und Sätze von Nr. 4 gelten für beliebige, also auch für unendlichdimensionale Vektorräume, sofern nicht ausdrücklich, wie z. B. im Satz V, einschränkende Voraussetzungen gemacht werden.

2. DIE DIMENSION LINEARER TEILRÄUME

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Vektorraum und W ein linearer Teilraum von V. Ist dim $V = n$, so sind je $n + 1$ Vektoren aus V linear abhängig. Dann sind aber auch je $n + 1$ Vektoren aus dem Teilraum W linear abhängig, und aus § 5, Nr. 2, Satz IV folgt:

I. *Ein linearer Teilraum W eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist endlichdimensional.*

Insbesondere gibt es höchstens $n = \dim V$ linear unabhängige Vektoren in W, und das bedeutet:

II. *Ist W ein linearer Teilraum des endlichdimensionalen Vektorraumes V, so gilt*

$$\dim W \leqq \dim V. \tag{1}$$

Wir betrachten den Fall $\dim W = \dim V = n$. Dann besitzt W eine Basis aus n linear unabhängigen Vektoren. Nach § 5, Nr. 2, Satz III bilden diese n linear unabhängigen Vektoren aber auch eine Basis des Vektorraumes V, und wir erhalten:

III. *Ist W ein linearer Teilraum des endlichdimensionalen Vektorraumes V und gilt $\dim W = \dim V$, so ist $W = V$.*

3. DIMENSIONSBEZIEHUNGEN FÜR DEN DURCHSCHNITT UND DIE SUMME LINEARER TEILRÄUME

Es sei V ein linearer Vektorraum, W_1, W_2 seien lineare Teilräume. Wir betrachten die linearen Teilräume $W_1 \cap W_2 = V_1$ und $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2 = V_2$ und untersuchen die Beziehungen zwischen den Dimensionen dieser Teilräume.

Setzen wir $\dim V = n$, $\dim W_1 = m_1$, $\dim W_2 = m_2$, $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$ und beachten, daß V_1 ein linearer Teilraum des Vektorraumes W_1 und des Vektorraumes W_2 ist, während die Vektorräume W_1 und W_2 ihrerseits lineare Teilräume von V_2 sind, so erhalten wir nach Satz II

$$n_1 \leqq \min(m_1, m_2) \leqq \max(m_1, m_2) \leqq n_2 \leqq n.$$

Es sei $\mathfrak{B}_1$ eine Basis von V_1. Dann besteht $\mathfrak{B}_1$ aus n_1 linear unabhängigen Vektoren aus V_1, und da V_1 ein Teilraum von W_1 ist, sind die Vektoren aus $\mathfrak{B}_1$ auch linear unabhängig in W_1. Nach § 4, Nr. 4, Satz VIII lassen sich die Vektoren aus $\mathfrak{B}_1$ zu einer Basis $\mathfrak{B}'_1$ von W_1 ergänzen. $\mathfrak{B}'_1$ ist eine Menge von m_1 linear unabhängigen Vektoren aus W_1, die die Menge $\mathfrak{B}_1$ als Teilmenge enthält. Entsprechend läßt sich $\mathfrak{B}_1$ zu einer Basis $\mathfrak{B}'_2$ von W_2 ergänzen, und die Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}'_1 \cup \mathfrak{B}'_2$ ist offenbar ein Erzeugendensystem von V_2. Die Menge $\mathfrak{E}_2$ besteht aus $n_1 + (m_1 - n_1) + (m_2 - n_1) = m_1 + m_2 - n_1$ Vektoren, und da jedes Erzeugendensystem eines endlichdimensionalen Vektorraumes eine Basis enthält, ist zunächst $n_2 \leqq m_1 + m_2 - n_1$ oder $n_1 + n_2 \leqq m_1 + m_2$.[1])

Wir beweisen, daß die Vektoren aus $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}'_1 \cup \mathfrak{B}'_2$ linear unabhängig sind. Dann ist $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{E}_2$ eine Basis von V_2, und es gilt:

IV. *Sind W_1, W_2 lineare Teilräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes V, so gilt*

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \tag{2}$$

Es sei

$$\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}, \quad \mathfrak{B}'_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}, x'_1, \ldots, x'_{m_1-n_1}\},$$

$$\mathfrak{B}'_2 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}, x''_1, \ldots, x''_{m_2-n_1}\},$$

und wir nehmen an, daß die Vektoren aus $\mathfrak{B}'_1 \cup \mathfrak{B}'_2$ linear abhängig sind. Dann gibt es reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m_1-n_1}, \alpha''_1, \ldots, \alpha''_{m_2-n_1}$, die nicht alle gleich Null sind, so daß

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n_1} x_{n_1} + \alpha'_1 x'_1 + \cdots + \alpha'_{m_1-n_1} x'_{m_1-n_1}$$
$$+ \alpha''_1 x''_1 + \cdots + \alpha''_{m_2-n_1} x''_{m_2-n_1} = o \tag{3}$$

[1]) Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß die Anordnung der Basisvektoren für die Untersuchung von Dimensionsbeziehungen unerheblich ist.

ist. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren aus $\mathfrak{B}_1'$ folgt, daß wenigstens eines der α_j'' $(1 \leqq j \leqq m_2 - n_1)$ von Null verschieden ist. Der Vektor

$$x'' = \alpha_1'' x_1'' + \cdots + \alpha_{m_2-n_1}'' x_{m_2-n_1}'' \neq o$$

gehört zu W_2 und nicht zu V_1, da die Vektoren $x_1, \ldots, x_{n_1}, x_1'', \ldots, x_{m_2-n_1}''$ linear unabhängig sind. Aus (3) folgt aber

$$x'' = -\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_{n_1} x_{n_1} - \alpha_1' x_1' - \cdots - \alpha_{m_1-n_1}' x_{m_1-n_1}',$$

und x'' gehört also zu W_1. Damit ist $x'' \in V_1 = W_1 \cap W_2$, was der Definition von x'' widerspricht. Die Vektoren aus $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_1' \cup \mathfrak{B}_2'$ sind linear unabhängig, und folglich ist $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{E}_2$ eine Basis von V_2.

1°. Es sei V ein zweidimensionaler Vektorraum, und W', W'' seien lineare Teilräume von V.

Ist $\dim W' = \dim W'' = 1$, *so ist* $W' = W''$, *oder es ist* $W' \cap W'' = \{o\}$ *und* $W' + W'' = V$.

Nach Satz IV ist $\dim(W' \cap W'') + \dim(W' + W'') = 2$. Ist $\dim(W' \cap W'') = 0$, so ist $W' \cap W'' = \{o\}$ und $\dim(W' + W'') = 2$, d. h., nach Satz III ist $W' + W'' = V$. Gilt aber $\dim(W' \cap W'') = 1$, so ist nach Satz III $W' \cap W'' = W'$ und $W' \cap W'' = W''$ und damit $W' = W''$.

2°. Es sei V ein dreidimensionaler Vektorraum, und W', W'' seien lineare Teilräume von V.

a) *Ist* $\dim W' = \dim W'' = 2$, *so ist* $W' = W''$, *oder es ist* $W' + W'' = V$ *und* $\dim(W' \cap W'') = 1$.
b) *Ist* $\dim W' = 1, \dim W'' = 2$, *so ist* $W' \subseteqq W''$, *oder es ist* $W' \cap W'' = \{o\}$ *und* $W' + W'' = V$.
c) *Ist* $\dim W' = \dim W'' = 1$, *so ist* $W' = W''$, *oder es ist* $W' \cap W'' = \{o\}$ *und* $\dim(W' + W'') = 2$.

Ist im Fall a) $W' \neq W''$, so ist $W' \cap W''$ ein echter Teilraum von W', und nach Satz II und III gilt $\dim(W' \cap W'') < 2$. Aus Satz IV folgt dann aber $\dim(W' \cap W'') = 1$ und $\dim(W' + W'') = 3$ und damit nach Satz III: $W' + W'' = V$.

Ist im Fall b) W' kein Teilraum von W'', so ist $W' \cap W''$ ein echter Teilraum von W' und folglich $\dim(W' \cap W'') < 1$ oder $W' \cap W'' = \{o\}$. Dann ist aber $\dim(W' + W'') = 3$, und nach Satz III: $W' + W'' = V$.

Ist im Fall c) $W' \neq W''$, so ist wie oben $\dim(W' \cap W'') < 1$ und folglich $W' \cap W'' = \{o\}$. Dann ist aber $\dim(W' + W'') = 2$.

4.* DIE DIREKTE SUMME

Ein linearer Vektorraum V heißt die *direkte Summe seiner Teilräume* W' *und* W'', wir schreiben $V = W' \dotplus W''$, wenn 1. $V = W' + W''$ und 2. $W' \cap W'' = \{o\}$ ist.

Aus Satz IV folgt unmittelbar:

V. *Ist der endlichdimensionale Vektorraum* V *die direkte Summe seiner Teilräume* W' *und* W'', *so ist*

$$\dim V = \dim W' + \dim W''.$$

In § 2, Nr. 5, Satz VII haben wir festgestellt, daß sich jeder Vektor $x \in W' + W''$ in der Form $x = x' + x''$ $(x' \in W', x'' \in W'')$ schreiben läßt. Wir wollen beweisen:

VI. *Ist der Vektorraum* V *die direkte Summe der Teilräume* W' *und* W'', *so läßt sich jeder Vektor* $x \in V$ *auf genau eine Weise in der Form*

$$x = x' + x'' \quad (x' \in W', x'' \in W'')$$

darstellen. Die Vektoren $x' \in W'$ und $x'' \in W''$, die die Projektionen des Vektors x auf W' bzw. W'' genannt werden, sind eindeutig bestimmt.

Es sei $V = W' \dotplus W''$. Wir nehmen an, daß wir den Vektor $x \in V$ in der Form

$$x = x_1' + x_1'' \quad \text{und} \quad x = x_2' + x_2''$$

darstellen können, wobei die Vektoren x_1', x_2' aus W' und die Vektoren x_1'', x_2'' aus W'' sind. Betrachten wir den Vektor $x' = x_1' - x_2' \in W'$, so erhalten wir aus den obigen Gleichungen durch Subtraktion

$$o = x_1' - x_2' + x_1'' - x_2'' = x' + x_1'' - x_2'' \quad \text{oder} \quad x' = x_2'' - x_1''.$$

Damit ist aber $x' = x_2'' - x_1''$ ein Vektor aus W'', und nach der Bedingung 2. in der Definition der direkten Summe ist $x' = o$. Daher gilt $x_1' - x_2' = o = x_2'' - x_1''$ oder $x_1' = x_2'$ und $x_1'' = x_2''$. Der Begriff der direkten Summe läßt sich auf endlich viele Summanden ausdehnen:

Der lineare Vektorraum V heißt die *direkte Summe der m linearen Teilräume* $W_1, \ldots, W_m$ (wir schreiben $V = W_1 \dotplus \cdots \dotplus W_m$), wenn a) $V = W_1 + \cdots + W_m$ und b) $(W_1 + \cdots + W_{i-1}) \cap W_i = \{o\}$ für jedes $i = 2, 3, \ldots, m$ gilt.

Wir beweisen zunächst durch Induktion eine Verallgemeinerung von Satz V.

VII. *Ist der endlichdimensionale Vektorraum V die direkte Summe der linearen Teilräume $W_1, \ldots, W_m$, so gilt* $\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$.

Für $m = 1$ ist die obige Gleichung offenbar richtig, und wir nehmen an, daß sie auch für $m - 1$ Summanden gilt. Es sei $W' = W_1 + \cdots + W_{m-1} = L(W_1 \cup \cdots \cup W_{m-1})$. Der Teilraum W' ist dann die direkte Summe seiner Teilräume $W_1, \ldots, W_{m-1}$, und nach Induktionsannahme folgt daraus $\dim W' = \dim W_1 + \cdots + \dim W_{m-1}$. Wegen der Bedingung b) in der Definition der direkten Summe gilt nach Satz V

$$\dim (W' + W_m) = \dim W' + \dim W_m.$$

Es ist $W' + W_m = L(L(W_1 \cup \cdots \cup W_{m-1}) \cup W_m) \supseteqq L(W_1 \cup \cdots \cup W_m) = V$ und damit $V = W' + W_m$. Es gilt also $\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_{m-1} + \dim W_m$, und der Satz VII ist bewiesen.

Entsprechend läßt sich der Satz VI auf die direkte Summe endlich vieler Teilräume übertragen:

VIII. *Ist der Vektorraum V die direkte Summe der Teilräume $W_1, \ldots, W_m$, so läßt sich jeder Vektor $x \in V$ auf genau eine Weise in der Form*

$$x = x_1 + \cdots + x_m \quad (x_1 \in W_1, \ldots, x_m \in W_m)$$

darstellen. Die Vektoren $x_1 \in W_1, \ldots, x_m \in W_m$, die die Projektionen des Vektors x auf die Teilräume $W_1, \ldots, W_m$ genannt werden, sind eindeutig bestimmt.

Zunächst ist der Satz für $m = 1$ richtig, und wir nehmen wiederum an, daß er für $m - 1$ Summanden gilt. Es sei $W' = W_1 + \cdots + W_{m-1}$; dann ist der Teilraum W' die direkte Summe seiner $m - 1$ Teilräume $W_1, \ldots, W_{m-1}$, und nach Induktionsannahme läßt sich jeder Vektor $x' \in W'$ auf genau eine Weise in der Form $x' = x_1 + \cdots + x_{m-1}$ $(x_1 \in W_1, \ldots, x_{m-1} \in W_{m-1})$ darstellen.

Wie schon beim Beweis von Satz VII bemerkt, ist $V = W' + W_m$, und da nach der Bedingung b) für die direkte Summe $W' \cap W_m = \{o\}$ ist, gilt $V = W' \dotplus W_m$. Nach Satz VI besitzt jeder Vektor $x \in V$ genau eine Darstellung der Form $x = x' + x_m$ $(x' \in W', x_m \in W_m)$, und die Projektionen x', x_m sind eindeutig bestimmt.

Damit ist aber

$$x = x_1 + \cdots + x_{m-1} + x_m \quad (x_1 \in W_1, \ldots, x_{m-1} \in W_{m-1}, x_m \in W_m),$$

und die Projektionen $x_1 \in W_1, \ldots, x_{m-1} \in W_{m-1}, x_m \in W_m$ sind eindeutig bestimmt.

Satz VIII läßt sich umkehren:

IX. *Es sei V ein linearer Vektorraum, $W_1, \ldots, W_m$ seien lineare Teilräume von V. Ist dann jeder Vektor $x \in V$ auf genau eine Weise in der Form*

$$x = x_1 + \cdots + x_m \quad (x_1 \in W_1, \ldots, x_m \in W_m)$$

darstellbar, so ist V die direkte Summe der Teilräume $W_1, \ldots, W_m$.

Da jeder Vektor $x \in V$ als Summe von Vektoren aus $W_1, \ldots, W_m$ geschrieben werden kann, ist $V \subseteqq L(W_1 \cup \cdots \cup W_m) = W_1 + \cdots + W_m$, und da alle W_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ Teilräume von V sind, gilt $V = W_1 + \cdots + W_m$. Die Bedingung a) aus der Definition der direkten Summe ist erfüllt. Die Bedingung b) beweisen wir indirekt. Es sei $(W_1 + \cdots + W_{i_0-1}) \cap W_{i_0} \neq \{o\}$ für ein festes i_0 mit $2 \leqq i_0 \leqq m$. Dann betrachten wir einen Vektor $x_0 = x_{i_0} \in W_{i_0}$, der vom Nullvektor verschieden ist und in $W_1 + \cdots + W_{i_0-1}$ liegt. Da $x_{i_0} \in W_1 + \cdots + W_{i_0-1}$ ist, gibt es Vektoren $x_1^{(0)} \in W_1, \ldots, x_{i_0-1}^{(0)} \in W_{i_0-1}$ mit

$$x_{i_0} = x_1^{(0)} + \cdots + x_{i_0-1}^{(0)}.$$

Wir setzen nun

$$x_i = \begin{cases} x_i^{(0)} & \text{für } i = 1, 2, \ldots, i_0 - 1, \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$x_i' = \begin{cases} o & \text{für } i \neq i_0, \\ x_{i_0} \neq o & \text{für } i = i_0. \end{cases}$$

Dann besitzt $x_0 = x_{i_0}$ die beiden verschiedenen Darstellungen

$$x_0 = x_1 + \cdots + x_m = x_1' + \cdots + x_m',$$

und die Vektoren x_i und x_i' sind aus W_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Damit ist der Satz IX bewiesen.

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{B}$ eine Basis von V, die aus den Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ besteht. Wir definieren die Teilräume $W_i = L(\{x_i\})$. Ist $x \in V$ ein beliebiger Vektor, so besitzt x eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren:

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Der Vektor $\alpha_i x_i$ ist aus dem Teilraum W_i $(i = 1, \ldots, n)$, und da die Koordinaten α_i durch den Vektor x eindeutig bestimmt sind, ist auch die Projektion $\alpha_i x_i$ von x auf den Teilraum W_i $(i = 1, \ldots, n)$ eindeutig bestimmt. Aus dem soeben bewiesenen Satz IX erhalten wir:

X. *Jeder n-dimensionale Vektorraum V ist die direkte Summe der von den Elementen einer Basis erzeugten eindimensionalen linearen Teilräume.* *

5. AUFGABEN

1. Sind W_1, W_2, W_3 lineare Teilräume des Vektorraumes V, so gilt

$$\begin{aligned}&3 \dim (W_1 \cap W_2 \cap W_3) \\ &\quad + \dim [(W_1 \cap W_2) + W_3] + \dim [(W_2 \cap W_3) + W_1] + \dim [(W_3 \cap W_1) + W_2] \\ &\quad + \dim [(W_1 + W_2) \cap W_3] + \dim [(W_2 + W_3) \cap W_1] + \dim [(W_3 + W_1) \cap W_2] \\ &\quad + \dim (W_1 + W_2 + W_3) \\ &= 4 \dim W_1 + 4 \dim W_2 + 4 \dim W_3.\end{aligned}$$

2.* Man beweise das assoziative Gesetz für die direkte Summe:

$$(W_1 \dotplus W_2) \dotplus W_3 = W_1 \dotplus (W_2 \dotplus W_3).$$

3.* Durch ein Gegenbeispiel zeige man, daß folgender Satz falsch ist: Ist $V = W_1 + W_2 + W_3$ und $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{o\}$, so ist V die direkte Summe von W_1, W_2, W_3.

4.* Ist V ein linearer Vektorraum, W' ein linearer Teilraum von V, so gibt es einen linearen Teilraum W'' von V, so daß $V = W' \dotplus W''$ ist.

5.* Sind $W_1, W_2, \ldots, W_s$ lineare Teilräume von V und ist $\mathfrak{B}_\sigma = \{x_1^{(\sigma)}, \ldots, x_{m_\sigma}^{(\sigma)}\}$ eine Basis von W_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$, so ist

$$\mathfrak{B} = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}; x_1^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}; \ldots; x_1^{(s)}, \ldots, x_{m_s}^{(s)}\}$$

dann und nur dann eine Basis von V, wenn $V = W_1 \dotplus W_2 \dotplus \cdots \dotplus W_s$ ist.

§ 7.* MANNIGFALTIGKEITEN IN ENDLICHDIMENSIONALEN VEKTORRÄUMEN

1. EINLEITUNG

In Verallgemeinerung der Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen über die Dimension linearer Teilräume eines endlichdimensionalen Vektorraumes definieren wir den Dimensionsbegriff für lineare Mannigfaltigkeiten und beweisen einige Dimensionsbeziehungen, die die im § 6 für lineare Teilräume bewiesenen Dimensionsbeziehungen verallgemeinern. Auf eine Anwendung dieser Ergebnisse zur Untersuchung der Geometrie des Raumes wird in Nr. 4 hingewiesen.

2. DIE DIMENSION LINEARER MANNIGFALTIGKEITEN

Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Vektorraum und M eine lineare Mannigfaltigkeit in V. Nach § 3, Nr. 3, Satz I′ bestimmt die Mannigfaltigkeit M eindeutig einen linearen Teilraum W von V, so daß $M = x_0 + W$ ist.

Unter der *Dimension der Mannigfaltigkeit M* verstehen wir nun die Dimension des zugehörigen linearen Teilraumes W:

Ist $M = x_0 + W$, so sei $\dim M \underset{\text{Def.}}{=} \dim W$.

Aus § 6, Nr. 2, Satz II und III folgt

I. *Ist M eine lineare Mannigfaltigkeit im endlichdimensionalen Vektorraum V, so ist* $\dim M \leqq \dim V$.

II. *Ist M eine lineare Mannigfaltigkeit im endlichdimensionalen Vektorraum V und ist* $\dim M = \dim V$, *so gilt* $M = V$.

Ist $M = x_0 + W$, so ist $\dim M = \dim W \leqq \dim V$, und aus $\dim M = \dim W = \dim V$ folgt $W = V$. Dann ist aber $M = x_0 + W = x_0 + V$, und da $x_0 \in V$ ist, gilt $M = V$.

3. DIMENSIONSBEZIEHUNGEN FÜR DEN DURCHSCHNITT UND DIE SUMME LINEARER MANNIGFALTIGKEITEN

Sind M_1 und M_2 lineare Mannigfaltigkeiten im endlichdimensionalen Vektorraum V, deren Durchschnitt nicht leer ist, so können wir mit einem Vektor $x_0 \in M_1 \cap M_2$ schreiben: $M_1 = x_0 + W_1$ und $M_2 = x_0 + W_2$. Nach § 3, Nr. 5. Satz II′ ist $M_1 \cap M_2 = x_0 + W_1 \cap W_2$, und wir erhalten:

III. *Ist der Durchschnitt der beiden linearen Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 im endlichdimensionalen Vektorraum V nicht leer, so gilt für die Dimension der Schnittmannigfaltigkeit*

$$\dim (M_1 \cap M_2) = \dim (W_1 \cap W_2).$$

Dabei sind W_1 und W_2 die den Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 zugeordneten linearen Teilräume. Insbesondere gilt also die Ungleichung

$$\dim (M_1 \cap M_2) \leqq \min (\dim M_1, \dim M_2).$$

Betrachten wir die von den Mannigfaltigkeiten $M_1 = x_1 + W_1$ und $M_2 = x_2 + W_2$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit $M_1 + M_2$, so ist der zugehörige lineare Teilraum nach § 3, Nr. 6 der Raum $L(W_1 \cup W_2 \cup \{x_2 - x_1\})$. Ist $M_1 \cap M_2$ nicht leer, so ist nach § 3, Nr. 6, Satz III der zu $M_1 + M_2$ gehörende Teilraum gleich $W_1 + W_2$. Besitzen die beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 aber keinen gemeinsamen Vektor, so ist der Vektor $x_2 - x_1$ linear unabhängig von den Vektoren aus $W_1 + W_2$. Dazu genügt es zu beweisen, daß $x_2 - x_1 \notin W_1 + W_2$ ist. Wäre $x_2 - x_1 \in W_1 + W_2$, so gäbe es einen Vektor $y_1 \in W_1$ und $y_2 \in W_2$, so daß $x_2 - x_1 = y_1 + y_2$ ist. Dann wäre aber $x_1 + y_1 = x_2 - y_2$, und da $x_1 + y_1 \in M_1$ und $x_2 - y_2 \in M_2$ ist, hätten die Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 einen gemeinsamen Vektor. Wir erhalten den folgenden Satz:

IV. *Sind M_1, M_2 lineare Mannigfaltigkeiten des endlichdimensionalen Vektorraumes V und sind W_1 und W_2 die zugehörigen linearen Teilräume, so gilt*

$$\dim (M_1 + M_2) = \dim (W_1 + W_2),$$

wenn M_1 und M_2 einen gemeinsamen Vektor besitzen, und es ist

$$\dim (M_1 + M_2) = \dim (W_1 + W_2) + 1,$$

wenn die beiden Mannigfaltigkeiten fremd sind.

Aus § 6, Nr. 3, Satz IV und den soeben bewiesenen Sätzen III und IV erhalten wir die folgende Dimensionsbeziehung für lineare Mannigfaltigkeiten.

V. *Sind M_1 und M_2 lineare Mannigfaltigkeiten des endlichdimensionalen Vektorraumes V, die einen gemeinsamen Vektor besitzen, so besteht zwischen den Dimensionen der Schnittmannigfaltigkeit und der von M_1 und M_2 aufgespannten Mannigfaltigkeit die Beziehung*

$$\dim (M_1 \cap M_2) + \dim (M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

4. GEOMETRISCHE VERANSCHAULICHUNG

1^0. Wir betrachten die in § 3, Nr. 4, 1^0 angegebene Veranschaulichung der linearen Mannigfaltigkeiten des dreidimensionalen Vektorraumes R^3 im dreidimensionalen Raum. Die Dimension einer Mannigfaltigkeit M des dreidimensionalen Vektorraumes R^3 ist 0, 1, 2 oder 3.

Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 0. Ist $M = x_0 + W$, so ist $\dim W = 0$, d.h. $W = \{o\}$. Die Mannigfaltigkeit M besteht also nur aus dem Vektor $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)})$, und die zugeordnete ebene Menge $\mathfrak{M}$ des dreidimensionalen Raumes ist einpunktig: P_0: $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}$. *Die nulldimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten des R^3 werden durch die Punkte des dreidimensionalen Raumes repräsentiert.*

Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Ist $M = x_0 + W$, so ist $\dim W = 1$; der Teilraum W besteht aus allen Vielfachen eines festen Vektors y. Die Mannigfaltigkeit M besteht dann aus allen Vektoren $z = x_0 + \alpha y$ $(\alpha \in R)$. Ist $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)})$ und $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, so besteht die M zugeordnete ebene Menge $\mathfrak{M}$ des Raumes aus allen Punkten P: $\xi_1^{(0)} + \alpha \cdot \eta_1$, $\xi_2^{(0)} + \alpha \cdot \eta_2$, $\xi_3^{(0)} + \alpha \cdot \eta_3$ $(\alpha \in R)$. *Die Menge $\mathfrak{M}$ ist eine Gerade, die durch den Punkt P_0: $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}$ geht und deren Richtung durch das Zahlentripel η_1, η_2, η_3 festgelegt ist.*

Es sei M eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Ist $M = x_0 + W$, so ist $\dim W = 2$, und es sei $\{y_1, y_2\}$ eine Basis von W. Die Mannigfaltigkeit M besteht dann aus allen Vektoren der Form $z = x_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\ (\alpha_1, \alpha_2 \in R)$. Ist $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)})$, $y_1 = (\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_3^{(1)})$, $y_2 = (\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \eta_3^{(2)})$, so besteht die M repräsentierende ebene Menge $\mathfrak{M}$ des Raumes aus allen Punkten

$$P:\quad \xi_1^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_1^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_1^{(2)},\ \xi_2^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_2^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_2^{(2)},\ \xi_3^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_3^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_3^{(2)} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R).$$

Die Menge $\mathfrak{M}$ ist eine Ebene, die durch den Punkt P_0: $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}$ geht und deren Lage im Raum durch die beiden Zahlentripel $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_3^{(1)}$; $\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \eta_3^{(2)}$ gegeben ist.

Ist M schließlich eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension 3, so ist $M = R^3$, und die M zugeordnete *ebene Menge $\mathfrak{M}$ besteht aus allen Punkten des Raumes.*

Nach § 3, Nr. 4 repräsentiert jeder Punkt, jede Gerade, jede Ebene des Raumes und der Raum selbst eine lineare Mannigfaltigkeit im R^3, die nach den obigen Überlegungen die Dimension 0, 1, 2 oder 3 besitzt. Dies ist eine Möglichkeit, geometrische Sachverhalte des Raumes in die Sprache der Vektorräume, speziell des Vektorraumes R^3, zu übersetzen und dort „analytisch" zu behandeln. Der dargelegte Zusammenhang ist die Grundlage der analytischen Geometrie des Raumes. Die oben angegebenen Darstellungen der Punkte P einer Geraden durch P_0 in der Form

$$P:\quad \xi_1^{(0)} + \alpha \cdot \eta_1,\ \xi_2^{(0)} + \alpha \cdot \eta_2,\ \xi_3^{(0)} + \alpha \cdot \eta_3 \quad (\alpha \in R)$$

sowie der Punkte P einer Ebene durch P_0 in der Form

$$P:\quad \xi_1^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_1^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_1^{(2)},\ \xi_2^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_2^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_2^{(2)},\ \xi_3^{(0)} + \alpha_1 \cdot \eta_3^{(1)} + \alpha_2 \cdot \eta_3^{(2)} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in R)$$

heißen *Parameterdarstellungen einer Geraden* bzw. *Ebene* des Raumes. Als Parameter dienen die Koeffizienten α bzw. α_1, α_2, die die Menge R der reellen Zahlen durchlaufen.

Aus den in Nr. 3 hergeleiteten Dimensionsbeziehungen wollen wir einige Schlüsse über den Schnitt ebener Mengen im Raum ziehen. Wir betrachten zwei zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 im R^3. Ist $M_1 \cap M_2$ leer, so ist $\dim(M_1 + M_2) = \dim(W_1 + W_2) + 1$, und da $\dim(M_1 + M_2) \leqq 3$ ist, folgt $\dim(W_1 + W_2) \leqq 2$. Aus $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ folgt aber $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. Damit ist $\dim(W_1 + W_2) = 2$, und es gilt $W_1 = W_2 = W_1 + W_2$.

Besitzen die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 im R^3 keinen gemeinsamen Vektor, so stimmen ihre zugehörigen Vektorräume überein. Das bedeutet, daß die zugehörigen Ebenen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ durch Verschiebung der gleichen Ebene aus dem Nullpunkt hervorgegangen, also parallel sind. Man nennt in diesem Fall auch die *Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 parallel.* Wir nehmen nun an, daß die linearen Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 nicht parallel sind. Dann besitzen sie einen gemeinsamen Vektor, und es gilt

$$\dim(M_1 \cap M_2) + \dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = 4,$$

da $2 \leqq \dim(M_1 + M_2) \leqq 3$ ist, folgt $2 \geqq \dim(M_1 \cap M_2) \geqq 1$. Ist $\dim(M_1 \cap M_2) = 2$, so ist $\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 = \dim M_2$ und damit $M_1 \cap M_2 = M_1 = M_2$. In diesem Fall sind die Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 gleich.

Zwei zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeiten im R^3 besitzen den gleichen linearen Teilraum oder eine eindimensionale Schnittmannigfaltigkeit.

Wir weisen darauf hin, daß wir beim Beweis dieses Satzes lediglich benutzt haben, daß der Vektorraum R^3 die Dimension 3 besitzt. Der genannte Satz gilt also für jeden dreidimensionalen Vektorraum. Für die Übertragung dieses Satzes auf die Ebenen des Raumes benutzen wir die früher beschriebene Zuordnung zwischen den Mannigfaltigkeiten des R^3 und den ebenen Mengen des Raumes und erhalten:

Zwei Ebenen des Raumes sind parallel, gleich oder schneiden sich in einer Geraden.

Die Untersuchung weiterer Schnittbeziehungen überlassen wir dem Leser.

5. AUFGABEN

1. Man zeige: Zwei eindimensionale lineare Mannigfaltigkeiten eines zweidimensionalen Vektorraumes besitzen den gleichen linearen Teilraum oder eine nulldimensionale Schnittmannigfaltigkeit.

2. Mit Hilfe von § 3, Nr. 7, Aufgabe 4 zeige man: Zwei Geraden in der Ebene sind parallel, gleich, oder sie besitzen genau einen Schnittpunkt.

3. Man diskutiere die Schnittmöglichkeiten einer Mannigfaltigkeit der Dimension 1 mit einer Mannigfaltigkeit der Dimension 2 sowie zweier Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 im R^3 und übertrage die genannten Sätze auf die Schnittverhältnisse der zugehörigen ebenen Mengen des Raumes.

4. Man zeige: Zwei $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten eines n-dimensionalen Vektorraumes besitzen den gleichen zugehörigen Teilraum oder eine $(n-2)$-dimensionale Schnittmannigfaltigkeit. *

II. LINEARE ABBILDUNGEN VON LINEAREN VEKTORRÄUMEN OHNE METRIK

§ 8. LINEARE ABBILDUNGEN

1. EINLEITUNG

Den Begriff der linearen Abbildung haben wir für endlichdimensionale Vektorräume in § 5, Nr. 3 kennengelernt. Der für die Anwendungen der Theorie der linearen Vektorräume überaus wichtige Zusammenhang zwischen den Vektoren eines abstrakten n-dimensionalen linearen Vektorraumes und ihren Koordinaten-n-tupeln wird durch eine lineare Abbildung beschrieben. Diese lineare Abbildung gestattet einerseits die „analytische" Untersuchung der linearen Vektorräume und ermöglicht andererseits die Anwendung allgemeiner Sätze auf die, etwa in der Physik, durch reelle Zahlen gekennzeichneten Gegebenheiten. Hieraus lassen sich bereits deutliche Hinweise auf die Bedeutung der linearen Abbildungen für die Theorie der linearen Vektorräume und ihre Anwendungen gewinnen. In der Tat handelt es sich um einen zentralen Begriff unserer Theorie, der in allen folgenden Untersuchungen eine mehr oder minder exponierte Rolle spielt. Mit Hilfe von linearen Abbildungen lassen sich nicht nur die Verhältnisse eines linearen Vektorraumes auf einen anderen übertragen oder gewisse Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen gegebenen Vektorräumen feststellen, sondern darüber hinaus allgemeine Überlegungen für die Behandlung konkreter Probleme, wie z. B. der Frage nach den Lösungen eines linearen Gleichungssystems, nutzbar machen. In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der abstrakten Theorie der linearen Abbildungen, wobei wir nur für einige Sätze voraussetzen, daß die betrachteten Vektorräume endlichdimensional sind. Die Spezialisierung auf endlichdimensionale Vektorräume und die Beschreibung der in diesem Paragraphen behandelten Sachverhalte mit Hilfe von reellen Zahlen enthält der folgende Paragraph. In ihm werden die Grundlagen der Matrizenrechnung als Anwendung der Ergebnisse dieses Paragraphen abgeleitet. Im § 10 wird dann die Frage nach den Lösungen linearer Gleichungssysteme auf der Grundlage der beiden vorhergehenden Paragraphen behandelt.

Dem vorwiegend an den Anwendungen interessierten Leser sowie demjenigen Leser, dem die abstrakten Überlegungen dieses Paragraphen zunächst Schwierig-

keiten bereiten, empfehlen wir, die Darlegungen der beiden folgenden Paragraphen in das Studium der abstrakten Theorie der linearen Abbildungen einzubeziehen, d. h. die §§ 8, 9 und 10 wechselweise in geeigneten Teilen zu lesen.

2. LINEARE ABBILDUNGEN; BILD UND URBILD; KERN

Wir wiederholen zu Beginn die in § 5, Nr. 3 gegebene Definition einer *linearen Abbildung*.

Sind V und V' zwei beliebige lineare Vektorräume, so heißt eine Abbildung A, die jedem Vektor $x \in V$ einen Vektor $x' = A(x) \in V'$ zuordnet, *linear*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für je zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt
$$A(x + y) = A(x) + A(y);$$
2. für jeden Vektor $x \in V$ und jede reelle Zahl $\alpha \in R$ gilt
$$A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

Der Vektor $x' = A(x) \in V'$, den wir auch mit Ax bezeichnen werden, heißt das *Bild* des Vektors x bei der Abbildung A. Der Vektor $x \in V$ heißt *ein Urbild* des Vektors $x' = Ax \in V'$.

Zur Erläuterung des Begriffs der linearen Abbildung betrachten wir einige Beispiele, wobei wir die sehr einfachen Beweise für die Linearität der angegebenen Abbildungen dem Leser als leichte Übung überlassen. Die Beispiele schließen sich unmittelbar an die in § 1, Nr. 3 genannten Beispiele an.

1°. Es sei R^2 der Vektorraum der Paare (α, β) von reellen Zahlen, und Ω sei der Vektorraum der komplexen Zahlen. Ordnen wir jedem Paar $(\alpha, \beta) \in R^2$ als Bild die komplexe Zahl $\alpha + \beta i \in \Omega$ zu, so wird durch die Gleichung

$$A(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$$

eine lineare Abbildung A von R^2 in Ω definiert.

2°. Es sei R^3 der Vektorraum der Tripel von reellen Zahlen. Dann wird durch die Gleichung

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

eine lineare Abbildung A des Vektorraumes R^3 in den Vektorraum R^2 definiert.

3°. Ist R^n der Vektorraum der n-tupel von reellen Zahlen und P der Vektorraum der Polynome in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten, so ist die Abbildung A, für die

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \cdots + \alpha_n t^{n-1}$$

ist, eine lineare Abbildung von R^n in P.

4°.* Ist R^n der Vektorraum der n-tupel von reellen Zahlen und π eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so ist die Abbildung A_π mit

$$A_\pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \ldots, \xi_{\pi(n)})$$

eine lineare Abbildung des Vektorraumes R^n in sich. *

5°. Es sei $R(\mathfrak{M})$ der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf der Menge $\mathfrak{M}$ und φ eine Abbildung der Menge $\mathfrak{M}$ auf die Menge $\mathfrak{M}'$. Ist $R(\mathfrak{M}')$ der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf der Menge $\mathfrak{M}'$, so wird durch

$$A_\varphi(x)\,(a) = x(\varphi(a)) \quad (a \in \mathfrak{M},\ \varphi(a) \in \mathfrak{M}')$$

eine lineare Abbildung von $R(\mathfrak{M}')$ in $R(\mathfrak{M})$ definiert.

6°.* Ist $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ $(n \geqq 1)$ der Vektorraum der auf dem abgeschlossenen Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definierten und dort n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist die Differentiation

$$Df(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

eine lineare Abbildung des Vektorraumes $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ in den Vektorraum $D_{n-1}(\alpha_0, \beta_0)$.*

7°.* Wir betrachten abermals den linearen Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$. Die Integration

$$If(t) = \int_{\alpha_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

ist eine lineare Abbildung von $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ in $D_{n+1}(\alpha_0, \beta_0)$.*

8°. Ist P_n der Vektorraum der Polynome in einer Unbestimmten t mit reellen Koeffizienten, deren Grad kleiner als n ist, so erhalten wir eine lineare Abbildung D von P_n in P_{n-1} und eine lineare Abbildung I von P_n in P_{n+1} durch die Gleichungen

$$Dp = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 t + \cdots + (n-1) \cdot \alpha_{n-1} t^{n-2},$$

$$Ip = \alpha_0 t + \frac{\alpha_1}{2} t^2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{n} t^n.$$

Dabei ist p in der Form $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$ angenommen.

Zu jedem Paar V, V' von linearen Vektorräumen gibt es eine „triviale“ lineare Abbildung $\boldsymbol{O}$, die jedem Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ den Nullvektor $\boldsymbol{o}' \in V'$ zuordnet, also durch die Gleichung

$$\boldsymbol{Ox} \underset{\text{Def.}}{=} \boldsymbol{o}' \quad (\boldsymbol{x} \in V) \tag{1}$$

definiert ist. Man spricht mitunter von der *Nullabbildung* des Vektorraumes V in den Vektorraum V'.

Es sei $\mathfrak{A} \subseteqq V$ eine beliebige Menge von Vektoren des linearen Vektorraumes V und $\boldsymbol{A}$ eine lineare Abbildung von V in V'. Die Menge aller Bilder der Vektoren aus $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{A}\mathfrak{A}$. Es ist $\boldsymbol{A}\mathfrak{A}$ eine Menge von Vektoren aus V'; ein Vektor $\boldsymbol{x}' \in V'$ gehört zu dieser Menge, wenn er ein Urbild $\boldsymbol{x} \in V$ besitzt, das der Menge $\mathfrak{A}$ angehört. Die Menge $\boldsymbol{A}\mathfrak{A}$ heißt das *Bild der Menge* $\mathfrak{A}$ bei der Abbildung $\boldsymbol{A}$.

Betrachten wir den Spezialfall $\mathfrak{A} = W$, wobei W einen linearen Teilraum von V bezeichnet, so können wir folgenden Satz beweisen:

I. *Ist V ein linearer Vektorraum und $\boldsymbol{A}$ eine lineare Abbildung von V in den linearen Vektorraum V', so ist das Bild $\boldsymbol{A}W$ eines jeden linearen Teilraumes W von V ein linearer Teilraum von V'.*

Zum Beweis müssen wir zeigen: a) Sind x', y' beliebige Vektoren aus AW, so ist $x' + y'$ ein Vektor aus AW; b) ist x' ein beliebiger Vektor aus AW und $\alpha \in R$, so gilt $\alpha x' \in AW$; c) AW ist nicht leer.

Zu a): Wenn x' und y' zu AW gehören, so bedeutet das, daß jeder dieser Vektoren ein Urbild im Teilraum W besitzt. Es gibt also ein $x \in W$ und ein $y \in W$, so daß $x' = Ax$, $y' = Ay$ ist. Betrachten wir das Bild Az des Vektors $z = x + y \in W$, so gilt wegen der Linearität der Abbildung A

$$Az = A(x + y) = Ax + Ay = x' + y'.$$

Der Vektor $x' + y'$ ist also das Bild des Vektors $z = x + y \in W$, und es ist $x' + y'$ aus AW.

Zu b): Zunächst gibt es einen Vektor $x \in W$, der ein Urbild des Vektors x' ist: $x' = Ax$. Wir betrachten das Bild $A(\alpha x)$ des Vektors $\alpha x \in W$. Dann gilt offenbar $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha x'$. Der Vektor $\alpha x \in W$ ist also ein Urbild des Vektors $\alpha x'$, und es ist $\alpha x' \in AW$.

Zu c): Ist $W = \{o\}$ und $Ao = z'$ das Bild des Nullvektors, so gilt für jeden Vektor $x \in V$ die Gleichung $z' = Ao = A(0x) = 0Ax = o'$ und damit $A\{o\} = \{o'\}$.

Eine lineare Abbildung A von V in V' bildet den Nullvektor $o \in V$ auf den Nullvektor $o' = Ao \in V'$ ab.

Es ist $o' = Ao \in AW$, und damit ist Satz I bewiesen.

Ist $W = V$, so folgt aus Satz I, daß das Bild AV des linearen Vektorraumes V ein Teilraum des linearen Vektorraumes V' ist. Den linearen Teilraum AV nennen wir auch kurz das *Bild der Abbildung A*. Ist $AV = V'$, so sagen wir: A ist eine lineare Abbildung von V *auf* V', andernfalls sprechen wir von einer linearen Abbildung von V *in* V'.

Es sei nun $\mathfrak{A}'$ eine Menge von Vektoren aus V'. Dann bezeichnen wir mit $A^{-1}\mathfrak{A}'$ die Menge aller Urbilder der Vektoren $x' \in \mathfrak{A}'$. Die Menge $A^{-1}\mathfrak{A}'$ ist eine Menge von Vektoren aus V, und ein Vektor $x \in V$ gehört zu dieser Menge, wenn sein Bild $x' = Ax$ der Menge $\mathfrak{A}'$ angehört. Die Menge $A^{-1}\mathfrak{A}'$ heißt das *vollständige Urbild der Menge* $\mathfrak{A}'$ bei der Abbildung A.

Man beachte: Ist x' ein Vektor aus V' und $\mathfrak{A}' = \{x'\}$, so ist $A^{-1}\mathfrak{A}' = A^{-1}\{x'\}$ eine Menge von Vektoren aus V, die im allgemeinen mehr als ein Element enthält.

Ist die Abbildung A *umkehrbar eindeutig*, d.h., ist $A^{-1}\{x'\}$ für jedes $x' \in AV$ eine einelementige Menge: $A^{-1}\{x'\} = \{x\}$, so können wir von *dem* Urbild x des Vektors $x' \in AV$ bei der Abbildung A sprechen.

Betrachten wir den Spezialfall $\mathfrak{A}' = W'$, wobei W' einen linearen Teilraum von V' bezeichnet, so gilt das folgende Analogon zum Satz I:

II. *Ist V ein linearer Vektorraum und A eine lineare Abbildung von V in den linearen Vektorraum V', so ist das vollständige Urbild $A^{-1}W'$ eines jeden linearen Teilraumes W' von V' ein linearer Teilraum von V*

Wir zeigen wie beim Beweis von Satz I: a) Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ beliebige Vektoren aus $A^{-1}W'$, so ist auch $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in A^{-1}W'$; b) ist $\boldsymbol{x}$ ein beliebiger Vektor aus $A^{-1}W'$ und $\alpha \in R$, so ist $\alpha\boldsymbol{x} \in A^{-1}W'$; c) $A^{-1}W'$ ist nicht leer.

Zu a): Die Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ liegen genau dann im vollständigen Urbild von W', wenn $A\boldsymbol{x} \in W'$ und $A\boldsymbol{y} \in W'$ ist. Da A eine lineare Abbildung ist, gilt $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$ und $A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} \in W'$. Damit ist $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in A^{-1}W'$.

Zu b): Zunächst ist $A\boldsymbol{x} \in W'$, und folglich ist $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x}$ ebenfalls aus W'. Dann ist aber $\alpha\boldsymbol{x} \in A^{-1}W'$.

Zu c): Aus $A\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}' \in W'$ folgt $\boldsymbol{o} \in A^{-1}W'$ und damit die Behauptung.

Ist $W' = \{\boldsymbol{o}'\}$, so ist $A^{-1}W'$ ein linearer Teilraum von V, der aus allen und nur den Vektoren besteht, die auf den Nullvektor von V' abgebildet werden. Der Teilraum $A^{-1}\{\boldsymbol{o}'\}$ heißt der *Kern der linearen Abbildung A.*

Wir betrachten den anderen Extremfall $W' = V'$. Dann besteht $A^{-1}V'$ aus allen Vektoren aus V, deren Bild bei der Abbildung A dem Vektorraum V' angehört, und da dies für alle Vektoren aus V gilt, ist $A^{-1}V' = V$.

Wir untersuchen einige der oben angegebenen Beispiele.

9°. Die lineare Abbildung A von R^2 in Ω aus 1° ist eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung des Vektorraumes R^2 *auf* den Vektorraum Ω. Es ist also $AR^2 = \Omega$ und $A^{-1}\{0 + 0i\} = \{(0, 0)\}$.

10°. Die in 2° definierte lineare Abbildung A von R^3 in R^2 ist eine lineare Abbildung von R^3 *auf* R^2. Es ist $AR^3 = R^2$. Ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$ wird durch A dann und nur dann auf den Nullvektor $(0, 0) \in R^2$ abgebildet, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist. Der Kern $A^{-1}\{(0, 0)\}$ der Abbildung A besteht also aus allen und nur den Tripeln der Form $(0, 0, \alpha_3)$. Es ist $A^{-1}\{(0, 0)\} = L(\{(0, 0, 1)\})$.

11°. Die in 3° definierte lineare Abbildung A von R^n in P ist *umkehrbar eindeutig.* Für den Kern von A gilt $A^{-1}\{\boldsymbol{o}\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, wobei $\boldsymbol{o}$ das Nullpolynom von P bezeichnet. Für das Bild der Abbildung A erhalten wir $AR^n = P_n$.

12°.* Die in 4° definierte lineare Abbildung ist eine *umkehrbar eindeutige* lineare Abbildung von R^n *auf* sich: $A_\pi R^n = R^n$ und $A_\pi^{-1}\{(0, 0, \ldots, 0)\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$.*

*Zum Abschluß dieses Abschnitts bestimmen wir das vollständige Urbild einer einelementigen Menge $\mathfrak{A}' = \{x'\} \subseteqq V'$ bei einer linearen Abbildung A von V in V' und beweisen:[1])

III. *Das vollständige Urbild $M_{x'} = A^{-1}\{x'\}$ einer einelementigen Teilmenge von AV ist eine lineare Mannigfaltigkeit in V, und es gilt $M_{x'} = x_0 + A^{-1}\{o'\}$. (Ist $x' \in V'$ und $x' \notin AV$, so ist $A^{-1}\{x'\}$ die leere Menge.)*

Ist $x' \in AV$, so gibt es einen Vektor $x \in V$, für den $Ax = x'$ gilt, die Menge $A^{-1}\{x'\}$ ist also nicht leer. Sind x_1, x_2 Vektoren aus $A^{-1}\{x'\}$ und α_1, α_2 zwei reelle Zahlen mit der Eigenschaft $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, so gilt

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= A(\alpha_1 x_1) + A(\alpha_2 x_2) = \alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) = \alpha_1 x' + \alpha_2 x' \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\, x' = x'. \end{aligned}$$

---

[1]) Der Beweis von Satz III beruht auf § 3, Nr. 3 und 5. Satz III findet in § 10, Nr. 4, Satz VI seine Anwendung und kann bis dahin zurückgestellt werden.

Das bedeutet aber $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A^{-1}\{x'\}$, und $A^{-1}\{x'\} = M_{x'}$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit in V. Ist $M_{x'} = x_0 + W$, so gilt für jedes Element $x = x_0 + y \in M_{x'}$ die Gleichung $Ax = A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay$, und da $Ax = Ax_0 = x'$ ist, folgt $Ay = o'$ oder $W \subseteq A^{-1}\{o'\}$. Ist umgekehrt $y \in A^{-1}\{o'\}$, so gilt $A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = Ax_0 = x'$ und folglich $x_0 + y \in M_{x'}$ oder $y \in W$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.*

3. DER LINEARE VEKTORRAUM $\mathscr{A}(V, V')$; DIE ADDITION LINEARER ABBILDUNGEN UND IHRE MULTIPLIKATION MIT REELLEN ZAHLEN

Es seien V und V' zwei gegebene lineare Vektorräume. Die Menge aller linearen Abbildungen des Vektorraumes V in den Vektorraum V' bezeichnen wir mit $\mathscr{A}(V, V')$. In der Menge $\mathscr{A}(V, V')$ können wir eine Addition der linearen Abbildungen sowie eine Multiplikation der linearen Abbildungen mit reellen Zahlen erklären. Die Menge $\mathscr{A}(V, V')$ wird dabei selbst ein linearer Vektorraum.

Dazu fassen wir die Abbildung A als „Funktion" mit dem Definitionsbereich V und dem Wertebereich AV auf, der im Unterschied zu dem in § 1, Nr. 3, 4⁰ betrachteten Fall nicht mehr die Menge der reellen Zahlen, sondern wiederum ein Vektorraum ist. Berücksichtigt man, daß die Menge der reellen Zahlen selbst ein linearer Vektorraum ist (§ 1, Nr. 3, 1⁰), so handelt es sich hier um eine Verallgemeinerung von § 1, Nr. 3, 4⁰. Die Definitionsgleichungen aus § 1, Nr. 3, 4⁰ übertragen wir sinngemäß auf den hier zu untersuchenden Fall. Es seien A_1 und A_2 lineare Abbildungen von V in V'. Wir definieren eine neue Abbildung A von V in V' durch die Definitionsgleichung

$$Ax \underset{\text{Def.}}{=} A_1 x + A_2 x \quad \text{für jedes } x \in V. \tag{2}$$

Das Bild des Vektors $x \in V$ bei der Abbildung A ist also die Summe der Bilder von x bei den Abbildungen A_1 und A_2. Der Vektor $A_1 x + A_2 x = Ax$ ist aus V', und A ist eine Abbildung von V in V'. Wir müssen noch zeigen, daß A eine lineare Abbildung ist. Für zwei Vektoren x und $y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} A(x + y) &= A_1(x + y) + A_2(x + y) = A_1 x + A_1 y + A_2 x + A_2 y \\ &= (A_1 x + A_2 x) + (A_1 y + A_2 y) = Ax + Ay. \end{aligned}$$

Damit ist die Eigenschaft 1 einer linearen Abbildung nachgewiesen, und entsprechend beweisen wir auch die Eigenschaft 2: Ist $x \in V$ und α eine reelle Zahl, so gilt

$$A(\alpha x) = A_1(\alpha x) + A_2(\alpha x) = \alpha A_1 x + \alpha A_2 x = \alpha(A_1 x + A_2 x) = \alpha A x.$$

Die durch die Gleichung (2) definierte lineare Abbildung A von V in V' bezeichnen wir mit $A_1 + A_2$, so daß wir die Gleichung (2) in der Form

$$(A_1 + A_2)\, x = A_1 x + A_2 x \quad (x \in V) \tag{2'}$$

schreiben können. Die lineare Abbildung $A = A_1 + A_2$ heißt die *Summe der linearen Abbildungen A_1 und A_2.*

Die „Multiplikation einer linearen Abbildung mit einer reellen Zahl" definieren wir wie folgt:

Ist $A_1 \in \mathscr{A}(V, V')$ und $\alpha_1 \in R$, so betrachten wir die durch

$$Ax \underset{\text{Def.}}{=} \alpha_1(A_1x) \quad \text{für jedes } x \in V \tag{3}$$

definierte Abbildung A, die jedem Vektor $x \in V$ den Vektor $\alpha_1(A_1x) \in V'$ zuordnet. Damit ist A eine Abbildung von V in V', und wir beweisen ihre Linearität. Sind x und y zwei Vektoren aus V, so gilt

$$\begin{aligned} A(x + y) &= \alpha_1(A_1(x + y)) = \alpha_1(A_1x + A_1y) = \alpha_1(A_1x) + \alpha_1(A_1y) \\ &= Ax + Ay. \end{aligned}$$

Ist $x \in V$ und α eine beliebige reelle Zahl, so gilt

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \alpha_1(A_1(\alpha x)) = \alpha_1(\alpha A_1x) = (\alpha_1 \cdot \alpha)(A_1x) \\ &= (\alpha \cdot \alpha_1)(A_1x) = \alpha(\alpha_1(A_1x)) = \alpha Ax. \end{aligned}$$

Die durch die Gleichung (3) definierte lineare Abbildung A von V in V' bezeichnen wir mit α_1A_1. Die Gleichung (3) können wir dann in der Form

$$(\alpha_1A_1)\,x = \alpha_1(A_1x) \quad (x \in V) \tag{3'}$$

schreiben. Die lineare Abbildung α_1A_1 heißt das *Produkt der Abbildung A_1 mit der reellen Zahl α_1.*

In der Menge $\mathscr{A}(V, V')$ aller linearen Abbildungen des Vektorraumes V in den Vektorraum V' haben wir eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt. Wir weisen nach, daß $\mathscr{A}(V, V')$ ein linearer Vektorraum ist:

1a) *Für die Addition von linearen Abbildungen gilt das assoziative Gesetz.* Es seien A_1, A_2 und A_3 lineare Abbildungen von V in V' und x ein beliebiger Vektor aus V. Dann ist

$$\begin{aligned} ((A_1 + A_2) + A_3)\,x &= (A_1 + A_2)\,x + A_3x = (A_1x + A_2x) + A_3x \\ &= A_1x + (A_2x + A_3x) = A_1x + (A_2 + A_3)\,x \\ &= (A_1 + (A_2 + A_3))\,x. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $(A_1 + A_2) + A_3$ und $A_1 + (A_2 + A_3)$ sind gleich, da sie für alle Vektoren x aus ihrem „Definitionsbereich" V übereinstimmen. Das assoziative Gesetz der Addition ist bewiesen.

1b) *Für die Addition von linearen Abbildungen gilt das kommutative Gesetz.* Sind A_1, A_2 zwei beliebige lineare Abbildungen von V in V' und ist x ein Vektor aus V,

so gilt $(A_1 + A_2)\,x = A_1x + A_2x = A_2x + A_1x = (A_2 + A_1)\,x$. Aus dieser Gleichung folgt das kommutative Gesetz der Addition von linearen Abbildungen.

1c) *In der Menge $\mathscr{A}(V, V')$ der linearen Abbildungen von V in V' gibt es ein Nullelement $\boldsymbol{O}$.* Es sei $\boldsymbol{O}$ die durch die Definitionsgleichung (1) gegebene Nullabbildung von V in V', die jedem Vektor $x \in V$ den Nullvektor $o' \in V'$ als Bild zuordnet.

Man zeigt leicht, daß diese Abbildung linear ist. Es ist $\boldsymbol{O} \in \mathscr{A}(V, V')$, und für jedes $A \in \mathscr{A}(V, V')$ gilt $(A + \boldsymbol{O})\,x = Ax + \boldsymbol{O}x = Ax + o' = Ax$. Da x ein beliebiger Vektor aus V ist, folgt $A + \boldsymbol{O} = A$ für jedes $A \in \mathscr{A}(V, V')$.

1d) *Zu jeder linearen Abbildung A von V in V' gibt es eine Negative.* Wir definieren

$$(-A)\,x \underset{\text{Def.}}{=} -(Ax) \quad (x \in V), \tag{4}$$

und man überzeugt sich leicht, daß mit A auch $(-A)$ eine lineare Abbildung von V in V' ist. Für jeden Vektor $x \in V$ gilt

$$(A + (-A))\,x = Ax + (-A)\,x = Ax - (Ax) = o' = \boldsymbol{O}x.$$

Daraus folgt $A + (-A) = \boldsymbol{O}$.

2a) Sind $\alpha, \beta \in R$ und ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in V', so ist für jeden Vektor $x \in V$

$$[\alpha(\beta A)]\,x = \alpha[(\beta A)\,x] = \alpha[\beta(Ax)] = (\alpha \cdot \beta)\,(Ax) = [(\alpha \cdot \beta)\,A]\,x,$$

und *es gilt das assoziative Gesetz der Multiplikation* $\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta)\,A$.

2b) Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ beliebig, so gilt für jedes $x \in V$ die Gleichung

$$(1A)\,x = 1(Ax) = Ax,$$

und es ist $1A = A$.

3a) Es sei α eine reelle Zahl, A_1, A_2 seien lineare Abbildungen von V in V', und x sei ein beliebiger Vektor aus V. Dann ist

$$\begin{aligned}[\alpha(A_1 + A_2)]\,x &= \alpha[(A_1 + A_2)\,x] = \alpha[A_1x + A_2x] \\ &= \alpha(A_1x) + \alpha(A_2x) = (\alpha A_1)\,x + (\alpha A_2)\,x \\ &= [\alpha A_1 + \alpha A_2]\,x.\end{aligned}$$

Es gilt das erste distributive Gesetz: $\alpha(A_1 + A_2) = \alpha A_1 + \alpha A_2$.

3b) Sind α, β reelle Zahlen und ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$, so gilt für jeden Vektor $x \in V$

$$\begin{aligned}[(\alpha + \beta)\,A]\,x &= (\alpha + \beta)\,(Ax) = \alpha(Ax) + \beta(Ax) \\ &= (\alpha A)\,x + (\beta A)\,x = [(\alpha A) + (\beta A)]\,x.\end{aligned}$$

Daraus folgt das zweite distributive Gesetz: $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$.

Unsere Überlegungen fassen wir in folgendem Satz zusammen:

IV. *Die Menge* $\mathscr{A}(V, V')$ *aller linearen Abbildungen eines linearen Vektorraumes* V *in einen linearen Vektorraum* V' *ist selbst ein linearer Vektorraum bezüglich der durch*

$$(A_1 + A_2)\,x \underset{\text{Def.}}{=} A_1x + A_2x \qquad (x \in V)$$

definierten Addition und der durch

$$(\alpha A)\,x \underset{\text{Def.}}{=} \alpha(Ax) \qquad (x \in V)$$

definierten Multiplikation mit einer reellen Zahl.

4. DIE MULTIPLIKATION LINEARER ABBILDUNGEN; DIE INVERSE

Wir erklären nun eine Multiplikation für lineare Abbildungen. Es seien V, V' und V_1', V_1'' lineare Vektorräume. Wir betrachten eine lineare Abbildung A von V in V' und eine lineare Abbildung A_1' von V_1' in V_1''. Das Bild AV der Abbildung A ist ein Teilraum des Vektorraumes V'. Nehmen wir an, daß V_1' ebenfalls ein Teilraum von V' ist, der überdies das Bild AV der Abbildung A enthält, $AV \subseteq V_1' \subseteq V'$, so ist die Abbildung A_1' auf den Vektoren aus AV erklärt, und wir erhalten eine Abbildung A_1 von V in V_1'', wenn wir jedem Vektor $x \in V$ den Vektor $A_1'(Ax) \in V_1''$ zuordnen:

$$A_1x \underset{\text{Def.}}{=} A_1'(Ax) \quad \text{für jedes } x \in V. \tag{5}$$

Wir sagen, die Abbildung A_1 sei als „Nacheinanderausführung" der Abbildungen A und A_1' erklärt, wobei zuerst A ausgeführt und dann die Abbildung A_1' auf das Bild der Abbildung A angewandt wird.

Die Abbildung A_1 ist eine lineare Abbildung von V in V_1''. Wir bezeichnen sie mit $A_1'A$ und sprechen von dem *Produkt der Abbildung A mit der Abbildung A_1'*. Für das Produkt zweier Abbildungen gilt also die Gleichung

$$(A_1'A)\,x = A_1'(Ax) \qquad (x \in V). \tag{5'}$$

Wir weisen besonders darauf hin, daß das Produkt zweier linearer Abbildungen nur dann erklärt ist, wenn das Bild AV der Abbildung A im „Definitionsbereich" V_1' der Abbildung A_1' enthalten ist. Ist das Produkt $A_1'A$ der Abbildungen A und A_1' erklärt, so ist das Produkt AA_1' im allgemeinen nicht erklärt.

Die oben behauptete Linearität der Abbildung $A_1 = A_1'A$ ergibt sich unmittelbar aus den folgenden Gleichungen:

$$A_1(x + y) = A_1'[A(x + y)] = A_1'[Ax + Ay] = A_1'(Ax) + A_1'(Ay)$$
$$= A_1x + A_1y,$$
$$A_1(\alpha x) = A_1'[A(\alpha x)] = A_1'[\alpha(Ax)] = \alpha[A_1'(Ax)] = \alpha A_1x.$$

Ist der Definitionsbereich V_1' der Abbildung A_1' gleich V', so erhalten wir:

V. *Ist* $A \in \mathscr{A}(V, V')$ *eine lineare Abbildung von* V *in* V' *und* $A' \in \mathscr{A}(V', V'')$ *eine lineare Abbildung von* V' *in* V'', *so ist das Produkt* $A'A$ *erklärt und eine lineare Abbildung von* V *in* V'': $A'A \in \mathscr{A}(V, V'')$.

Betrachten wir noch einen weiteren linearen Vektorraum V''' und eine lineare Abbildung $A'' \in \mathscr{A}(V'', V''')$, so ist das Produkt $A''(A'A)$ erklärt, denn $A'A$ ist eine lineare Abbildung von V in V'', auf deren Bild die Abbildung A'' angewandt werden kann. Als Ergebnis erhalten wir die lineare Abbildung $A''(A'A)$. Betrachten wir aber zunächst nur die linearen Vektorräume V', V'' und V''' sowie die linearen Abbildungen A' und A'' von V' in V'' bzw. von V'' in V''', so können wir das Produkt $A''A'$ bilden und erhalten eine lineare Abbildung von V' in V'''. Diese lineare Abbildung können wir auf das Ergebnis der linearen Abbildung A von V in V' anwenden und erhalten die Abbildung $(A''A')\,A$. Wir stellen fest:

VI. *Sind* V, V', V'' *und* V''' *beliebige lineare Vektorräume und sind* $A \in \mathscr{A}(V, V')$, $A' \in \mathscr{A}(V', V'')$, $A'' \in \mathscr{A}(V'', V''')$ *lineare Abbildungen von* V *in* V', *von* V' *in* V'' *und von* V'' *in* V''', *so existieren die Produkte* $A''(A'A)$ *und* $(A''A')\,A$, *und es gilt das assoziative Gesetz*

$$A''(A'A) = (A''A')\,A. \tag{6}$$

Wir brauchen nur die Gleichung (6) zu beweisen und betrachten dazu einen beliebigen Vektor $x \in V$. Berücksichtigen wir die Definition der Multiplikation linearer Abbildungen als Nacheinanderausführung, so erhalten wir die Gleichungen

$$[A''(A'A)]\,x = A''((A'A)\,x) = A''(A'(Ax))$$

und

$$[(A''A')\,A]\,x = (A''A')\,(Ax) = A''(A'(Ax)).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Behauptung.

In Analogie zu den in § 1, Nr. 4 und 5 für die Addition in linearen Vektorräumen durchgeführten Überlegungen können wir das Produkt von n linearen Abbildungen definieren und das verallgemeinerte assoziative Gesetz der Multiplikation beweisen. Das verallgemeinerte assoziative Gesetz der Multiplikation besagt, daß man in einem Produkt von n linearen Abbildungen in beliebiger Weise Klammern setzen und weglassen darf. Bei der Durchführung der Beweise, die wir dem Leser als Übung überlassen, ist darauf zu achten, daß man die Reihenfolge linearer Abbildungen nicht vertauschen darf.

Da für die Multiplikation linearer Abbildungen das assoziative Gesetz gilt, ist es üblich, die Klammern in einem Produkt von linearen Abbildungen fortzulassen.

In Nr. 2 haben wir festgestellt, daß das vollständige Urbild $A^{-1}\{x'\}$ eines Vektors $x' \in AV$ eine einelementige Menge $\{x\} \subseteq V$ ist, wenn die lineare Abbildung A von V in V' umkehrbar eindeutig ist. In diesem Fall erhalten wir eine Abbildung von AV

in V, wenn wir jedem Vektor $x' \in AV$ sein Urbild $x \in V$ zuordnen. Diese Abbildung bezeichnen wir mit A^{-1} und erhalten folgende Definitionsgleichung:

$$A^{-1}x' \underset{\text{Def.}}{=} x, \text{ wenn } A^{-1}\{x'\} = \{x\} \text{ gilt.} \tag{7}$$

Jeder umkehrbar eindeutigen linearen Abbildung von V in V' entspricht eine Abbildung A^{-1} von AV in V, die wir die *zu A inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung* oder auch kurz die *Inverse* nennen. Wir beweisen:

VII. *Ist A eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von V in V', so ist die durch (7) definierte inverse Abbildung A^{-1} von AV auf V ebenfalls linear. Das Produkt $A^{-1}A$ ist erklärt, und für jeden Vektor $x \in V$ gilt*

$$(A^{-1}A)x = x.$$

Zunächst betrachten wir zwei Vektoren x', y' aus AV. Dann gibt es zwei wohlbestimmte Vektoren x und y aus V, so daß $Ax = x'$ und $Ay = y'$ ist, und es gilt $A(x + y) = x' + y'$. Das heißt $\{x + y\} = A^{-1}\{x' + y'\}$ und $x + y = A^{-1}(x' + y')$. Nach Voraussetzung ist aber $\{x\} = A^{-1}\{x'\}$ und $\{y\} = A^{-1}\{y'\}$ und folglich $x = A^{-1}x'$, $y = A^{-1}y'$ oder $A^{-1}(x' + y') = A^{-1}x' + A^{-1}y'$. Ist $x' \in AV$ und $\alpha \in R$, so sei x das Urbild von x' in V; dann gilt $Ax = x'$ und $A(\alpha x) = \alpha x'$. Damit ist $\{x\} = A^{-1}\{x'\}$ und $\{\alpha x\} = A^{-1}\{\alpha x'\}$ oder $x = A^{-1}x'$ und $\alpha x = A^{-1}(\alpha x')$, d. h. $A^{-1}(\alpha x') = \alpha(A^{-1}x')$.

Das Bild AV der linearen Abbildung A ist der Definitionsbereich der Abbildung A^{-1}, und folglich ist das Produkt $A^{-1}A$ erklärt. Ist x ein beliebiger Vektor aus V und $x' = Ax$ sein Bild in AV, so gilt $x = A^{-1}x'$ und damit $x = A^{-1}(Ax)$ oder $x = (A^{-1}A)x$.

Eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung eines Vektorraumes V in einen Vektorraum V' nennen wir auch eine *reguläre lineare Abbildung*.

Eine reguläre lineare Abbildung eines linearen Vektorraumes V *auf* einen linearen Vektorraum V' haben wir in § 5, Nr. 3 einen *Isomorphismus* von V auf V' genannt.

Wir betrachten abermals einige Beispiele:

13°. Die in 1° angegebene lineare Abbildung A von R^2 in Ω ist nach 9° eine umkehrbar eindeutige Abbildung von R^2 auf Ω, sie besitzt also eine Inverse A^{-1}, und A^{-1} ist eine lineare Abbildung von Ω auf R^2. Die Abbildung A^{-1} wird durch die Gleichung $A^{-1}(\alpha + \beta i) = (\alpha, \beta)$ gegeben.

14°. Betrachten wir die in 2° angegebene lineare Abbildung A von R^3 in R^2 und bezeichnen die obige lineare Abbildung von R^2 in Ω mit A_1, so ist $AR^3 = R^2$, und das Produkt A_1A ist erklärt. Dieses Produkt wird durch die Gleichung $A_1A((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \alpha_1 + \alpha_2 i$ gegeben.

15°. Es sei A die in 3° definierte lineare Abbildung von R^n in P und D die in 8° definierte Abbildung von P_n in P_{n-1}. Nach 11° ist $AR^n = P_n$, und das Produkt DA ist definiert. Es wird durch die Gleichung

$$DA((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 t + \cdots + (n-1) \cdot \alpha_n t^{n-2}$$

gegeben. Bezeichnen wir mit A_1 die der linearen Abbildung A von 3^0 entsprechende lineare Abbildung von R^{n-1} in P, so ist $A_1 R^{n-1} = P_{n-1}$, und da A_1 eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist, existiert eine Inverse A_1^{-1}, und A_1^{-1} ist eine Abbildung von P_{n-1} in R^{n-1}, die durch die Gleichung

$$A_1^{-1}(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_{n-2} t^{n-2}) = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$$

gegeben ist. Betrachten wir die lineare Abbildung DA, so ist $DAR^n = P_{n-1} = A_1 R^{n-1}$, und folglich ist das Produkt $A_1^{-1}(DA)$ definiert. Dabei handelt es sich um eine Abbildung von R^n in R^{n-1}, was wir uns folgendermaßen graphisch veranschaulichen:

$$R^n \xrightarrow{A} P_n \xrightarrow{D} P_{n-1} \xrightarrow{A_1^{-1}} R^{n-1}.$$

Die lineare Abbildung $A_1^{-1}DA$ wird durch die folgende Gleichung gegeben:

$$(A_1^{-1}DA)((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = (\alpha_2, 2 \cdot \alpha_3, \ldots, (n-1) \cdot \alpha_n).$$

16^0.* Ist A_π die in 4^0 definierte umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von R^n auf sich, so gilt $A_\pi^{-1} = A_{\pi^{-1}}$. Dabei bezeichnet π^{-1} diejenige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die die gegebene Permutation π rückgängig macht (vgl. auch § 13, Nr. 2). *

17^0.* Wir betrachten die in 6^0 definierte lineare Abbildung D auf dem Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$. Da n eine beliebige ganze Zahl war, können wir die entsprechende Abbildung auf den Vektorräumen $D_{n-1}(\alpha_0, \beta_0), \ldots, D_1(\alpha_0, \beta_0)$ definieren, die wir ebenfalls mit D bezeichnen. Wir bilden das Produkt $D^\nu = \underbrace{DD \cdots D}_{\nu\text{-mal}}$ für $0 < \nu \leqq n$ als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$, wobei wir beachten, daß die Abbildungen D in diesem Produkt auf verschiedenen Vektorräumen definiert sind: Die an der i-ten Stelle stehende Abbildung D ist eine lineare Abbildung von $D_{n-\nu+i}(\alpha_0, \beta_0)$ in $D_{n-\nu+i-1}(\alpha_0, \beta_0)$. Definieren wir noch D^0 durch die Gleichung $D^0 f(t) = f(t)$ für jedes $f(t) \in D_n(\alpha_0, \beta_0)$, so ist D^ν für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ eine lineare Abbildung von $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ in $D_{n-\nu}(\alpha_0, \beta_0)$. Es ist

$$D^\nu f(t) = \frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) = f^{(\nu)}(t).$$

Das Differenzieren reeller Funktionen läßt sich auf diese Weise durch lineare Abbildungen beschreiben. *

18^0. Es sei D die in 8^0 erklärte lineare Abbildung von P_n in P_{n-1}. Da P_{n-1} ein linearer Teilraum von P_n ist, können wir D als lineare Abbildung von P_n in sich auffassen und die Potenzen D^ν für $\nu = 1, 2, \ldots$ bilden. Es gilt $D^n = O$, wenn O die Nullabbildung bezeichnet.

5. DER RANG UND DER DEFEKT LINEARER ABBILDUNGEN

Beschränken wir uns auf die Betrachtung endlichdimensionaler linearer Vektorräume, so lassen sich die bisherigen Überlegungen durch eine Reihe wichtiger Sätze ergänzen.

Wir beweisen zunächst den Satz

VIII. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und A eine lineare Abbildung von V in V', so ist das Bild AV ein endlichdimensionaler Teilraum von V', und es gilt*

$$\dim AV \leqq \dim V.$$

Steht in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen, so ist die Abbildung A regulär.

Es sei $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis des linearen Vektorraumes V. Das Bild von $\mathfrak{B}$ ist eine Teilmenge $A\mathfrak{B} = \{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ von AV, und wir beweisen $AV = L(A\mathfrak{B})$. Der Vektorraum AV ist endlich erzeugbar und folglich ein endlichdimensionaler Vektorraum. Überdies enthält das Erzeugendensystem $A\mathfrak{B}$ eine Basis $\mathfrak{B}'$ von AV, und es ist $n' = \dim AV \leqq n = \dim V$.

Der erste Teil von Satz VIII ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $AV = L(A\mathfrak{B})$ ist. Da AV ein linearer Vektorraum ist und $A\mathfrak{B} \subseteq AV$ gilt, folgt $L(A\mathfrak{B}) \subseteq AV$, und es bleibt die Umkehrung zu beweisen.

Ist x' ein beliebiger Vektor aus AV, so gibt es ein Urbild x in V: $x' = Ax$. Da $\mathfrak{B}$ eine Basis von V ist, gibt es reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so daß $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ ist. Dann gilt aber $x' = Ax = A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$, und aus der Linearität der Abbildung A folgt

$$A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1(Ax_1) + \cdots + \alpha_n(Ax_n).$$

Es ist also $x' \in L(A\mathfrak{B})$ und damit $AV = L(A\mathfrak{B})$.

Ist nun $\dim AV = \dim V$, so sind die Vektoren $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ linear unabhängig, und $A\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ ist eine Basis von AV. Zu jedem Vektor $x' \in AV$ gibt es n wohlbestimmte reelle Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$, so daß

$$x' = \beta_1(Ax_1) + \cdots + \beta_n(Ax_n)$$

ist. Es sei $x \in A^{-1}\{x'\}$ ein Urbild von x' und $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, dann ist $x' = Ax = \alpha_1(Ax_1) + \cdots + \alpha_n(Ax_n)$, und da $A\mathfrak{B} = \{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ eine Basis von AV ist, gilt $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Die Urbildmenge $A^{-1}\{x'\}$ ist einelementig, und die Abbildung A ist folglich regulär.

Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und A eine lineare Abbildung von V in V', so nennt man die Dimension des Bildes von A den *Rang der Abbildung* A:

$$r(A) \underset{\text{Def.}}{=} \dim AV. \tag{8}$$

VIII'. *Der Rang einer linearen Abbildung A des endlichdimensionalen Vektorraumes V in den linearen Vektorraum V' ist stets kleiner oder gleich der Dimension ihres Definitionsbereiches V, und die lineare Abbildung A ist genau dann regulär, wenn $r(A) = \dim V$ ist.*

Es bleibt lediglich zu beweisen, daß für eine reguläre Abbildung $\dim AV = \dim V$ gilt; die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus dem Satz VIII und der Definitionsgleichung (8).

Wir beweisen den Satz

IX. *Eine lineare Abbildung A des endlichdimensionalen Vektorraumes V in den linearen Vektorraum V' ist genau dann regulär, wenn die Bilder $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ der Basisvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer Basis $\mathfrak{B}$ von V eine Basis $\mathfrak{B}'$ von AV bilden.*

Die eine Richtung auch dieses Satzes haben wir bereits beim Beweis von Satz VIII erhalten. Es genügt zu zeigen:

Ist A regulär und $\mathfrak{B}$ eine Basis von V, so ist $\mathfrak{B}' = \{A\boldsymbol{x}_1, \ldots, A\boldsymbol{x}_n\}$ eine Basis von AV.

Zunächst ist $\mathfrak{B}'$ ein Erzeugendensystem von AV. Betrachten wir die Gleichung

$$\alpha_1(A\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n(A\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}'$$

im Vektorraum AV, so können wir die linke Seite wegen der Linearität der Abbildung A umformen und erhalten

$$A(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}'. \tag{9}$$

Da die Abbildung A als regulär vorausgesetzt war, besitzt jeder Vektor aus AV genau ein Urbild, und das Urbild des Nullvektors $\boldsymbol{o}'$ von AV ist der Nullvektor $\boldsymbol{o} \in V$. Aus (9) folgt also

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$$

und hieraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, da $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} = \mathfrak{B}$ eine Basis von V war. Die Vektoren $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von AV.

Ist V ein endlichdimensionaler linearer Vektorraum und A eine lineare Abbildung von V in V', so ist der Kern $W_0 = A^{-1}\{\boldsymbol{o}'\}$ der Abbildung A ein linearer Teilraum von V, und seine Dimension heißt der *Defekt der Abbildung A*:

$$d(A) \underset{\text{Def.}}{=} \dim A^{-1}\{\boldsymbol{o}'\}. \tag{10}$$

Zwischen dem Defekt und dem Rang einer linearen Abbildung besteht folgender wichtige Zusammenhang:

X. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und A eine lineare Abbildung von V in den linearen Vektorraum V', so gilt*

$$d(A) + r(A) = \dim V. \tag{11}$$

Es sei $W_0 = A^{-1}\{\boldsymbol{o}'\}$ der Kern der Abbildung A. Dann ist W_0 ein Teilraum von V, und $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d\}$ sei eine Basis von W_0. Nach § 4, Nr. 4, Satz VIII lassen sich die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d, \boldsymbol{x}_{d+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ von V ergänzen. Betrachten wir die Menge $A\mathfrak{B} = \{A\boldsymbol{x}_1, \ldots, A\boldsymbol{x}_d, A\boldsymbol{x}_{d+1}, \ldots, A\boldsymbol{x}_n\}$, so ist nach Voraussetzung $A\boldsymbol{x}_1 = \cdots = A\boldsymbol{x}_d = \boldsymbol{o}'$. Die Menge $\{A\boldsymbol{x}_{d+1}, \ldots, A\boldsymbol{x}_n\} = \mathfrak{B}'$ ist ein Erzeugendensystem von AV, und es genügt zu zeigen, daß diese Vektoren linear unabhängig sind. Es sei $r = n - d$ und $\alpha_1(A\boldsymbol{x}_{d+1}) + \cdots + \alpha_r(A\boldsymbol{x}_{d+r}) = \boldsymbol{o}'$; dann folgt aus der Linearität der Abbildung A

$$A(\alpha_1\boldsymbol{x}_{d+1} + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{x}_{d+r}) = \boldsymbol{o}'$$

und damit $\alpha_1\boldsymbol{x}_{d+1} + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{x}_{d+r} \in A^{-1}\{\boldsymbol{o}'\} = W_0$. Infolgedessen läßt sich dieser Vektor als Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_d$ schreiben, die eine Basis von

W_0 bilden: $\alpha_1 x_{d+1} + \cdots + \alpha_r x_{d+r} = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_d x_d$. Es gilt also

$$\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_d x_d + \gamma_{d+1} x_{d+1} + \cdots + \gamma_n x_n = o$$

mit $\gamma_1 = -\beta_1, \ldots, \gamma_d = -\beta_d, \gamma_{d+1} = \alpha_1, \ldots, \gamma_n = \alpha_r$. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ folgt $\gamma_1 = \cdots = \gamma_d = \gamma_{d+1} = \cdots = \gamma_n = 0$. Dann ist auch $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, und die Vektoren $Ax_{d+1}, \ldots, Ax_n$ sind linear unabhängig. Es ist $\dim AV = r(A) = r$ und $r + d = n$.

6.* DER FAKTORRAUM

Wir betrachten zwei lineare Vektorräume V und V' und eine lineare Abbildung A von V in V'. Es sei $W_0 = A^{-1}\{o'\}$ der Kern der Abbildung A und V/W_0 die Menge der *verschiedenen* linearen Mannigfaltigkeiten $M = x + W_0$ in V, deren zugehöriger Vektorraum der Teilraum W_0 von V ist. Die Abbildung $\bar{A}$, die jeder linearen Mannigfaltigkeit $M = x + W_0 \in V/W_0$ den Vektor $x' = Ax$ aus V' zuordnet, ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V/W_0 auf AV. Zum Beweis bemerken wir: Die Abbildung $\bar{A}$ ist durch die Gleichung

$$\bar{A}(M) = \bar{A}(x + W_0) \underset{\text{Def.}}{=} Ax \tag{12}$$

definiert. Diese Definitionsgleichung ist sinnvoll, denn aus $x + W_0 = y + W_0$ folgt die Existenz eines $z_0 \in W_0$ mit $y = x + z_0$, und es ist $Ay = A(x + z_0) = Ax + Az_0 = Ax + o' = Ax$. Da y ein beliebiger Vektor aus M sein kann, gilt sogar $\{\bar{A}(M)\} = AM$. Ist $x' \in AV$ beliebig, so ist nach Satz III $M_x = x + W_0 = A^{-1}\{x'\}$ eine Mannigfaltigkeit aus V/W_0, und es gilt $\{x'\} = \{Ax\} = AM_x$. Daraus folgt insbesondere: Ist $x_1' = x_2'$, so ist auch $M_{x_1} = A^{-1}\{x_1'\} = A^{-1}\{x_2'\} = M_{x_2}$.

In der Menge V/W_0 definieren wir eine Addition und eine Multiplikation mit einer reellen Zahl derart, daß V/W_0 ein linearer Vektorraum und $\bar{A}$ eine lineare Abbildung von V/W_0 auf AV wird.[1])

Es seien M_1 und M_2 lineare Mannigfaltigkeiten aus der Menge V/W_0. Mit $M_1 + M_2$ bezeichnen wir die Menge aller Vektoren $y \in V$, die sich in der Form $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in M_1$ und $y_2 \in M_2$ schreiben lassen.

Ist $M_1 = x_1 + W_0$ *und* $M_2 = x_2 + W_0$, *so ist* $M_1 + M_2 = (x_1 + x_2) + W_0$.

Es sei zunächst $y \in M_1 + M_2$. Dann gibt es Vektoren $y_1 \in M_1$ und $y_2 \in M_2$, so daß $y = y_1 + y_2$ ist. Ferner gibt es Vektoren z_1 und $z_2 \in W_0$, so daß $y_1 = x_1 + z_1$ und $y_2 = x_2 + z_2$ ist. Damit gilt

$$y = y_1 + y_2 = (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) = (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) \in (x_1 + x_2) + W_0.$$

Ist umgekehrt $y \in (x_1 + x_2) + W_0$, d. h., gibt es ein $z_0 \in W_0$, so daß $y = (x_1 + x_2) + z_0$ ist, so gilt $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 = x_1 \in M_1$ und $y_2 = x_2 + z_0 \in M_2$, so daß $y \in M_1 + M_2$ ist. Damit haben wir aber gleichzeitig bewiesen, daß $M_1 + M_2$ eine Mannigfaltigkeit aus V/W_0 ist.

Bezeichnet M eine Mannigfaltigkeit aus V/W_0 und α eine beliebige reelle Zahl, so sei αM die Menge aller αy mit $y \in M$.

Ist $M = x + W_0$, *so ist* $\alpha M = \alpha x + W_0$.

Aus $y = x + z_0 \in M$ folgt $\alpha y = \alpha x + \alpha z_0$, und aus $y' = \alpha x + z_0$ folgt $y' = \alpha x + \alpha(\alpha^{-1} z_0) = \alpha y$ mit $y = x + \alpha^{-1} z_0 \in M$. Damit ist auch αM eine Mannigfaltigkeit aus V/W_0, und wir haben in V/W_0 eine „Addition“ und eine „Multiplikation mit reellen Zahlen“ erklärt.

---

[1]) Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß die hier erklärte Summe linearer Mannigfaltigkeiten von der in § 3, Nr. 6 erklärten Summe verschieden ist.

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, daß wir für die Definition der Addition und Multiplikation von Mannigfaltigkeiten lediglich davon Gebrauch gemacht haben, daß der zugehörige Teilraum W_0 für alle Mannigfaltigkeiten der gleiche ist. Wir haben nicht benutzt, daß W_0 der Kern einer linearen Abbildung ist, und werden dies auch zum Beweis des folgenden Satzes nicht benötigen.

XI. *Ist V ein linearer Vektorraum, W_0 ein linearer Teilraum von V und bezeichnet V/W_0 die Menge der verschiedenen Mannigfaltigkeiten $M = x + W_0$, so ist V/W_0 ein linearer Vektorraum bezüglich der soeben erklärten Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen.*

1a) $(M_1 + M_2) + M_3$ ist nach Definition die Menge der Vektoren $(y_1 + y_2) + y_3$ mit $y_1 \in M_1$, $y_2 \in M_2$, $y_3 \in M_3$. Da $(y_1 + y_2) + y_3 = y_1 + (y_2 + y_3)$ gilt, ist $(M_1 + M_2) + M_3$ gleich der Menge $M_1 + (M_2 + M_3)$, die aus allen Vektoren $y_1 + (y_2 + y_3)$ mit $y_1 \in M_1$, $y_2 \in M_2$, $y_3 \in M_3$ besteht.

1b) $M_1 + M_2$ besteht aus allen Vektoren $y_1 + y_2$ mit $y_1 \in M_1$, $y_2 \in M_2$. Es ist $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, und folglich gilt $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$; denn $M_2 + M_1$ besteht aus allen Vektoren $y_2 + y_1$ mit $y_1 \in M_1$, $y_2 \in M_2$.

1c) $W_0 = M_0$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit aus V/W_0, und ist M eine beliebige Mannigfaltigkeit aus V/W_0, so besteht $M + W_0$ aus allen Vektoren der Form $y + z$ mit $y \in M$ und $z \in W_0$. Es ist $y + z \in M$ und folglich $M + W_0 = M$. Die Mannigfaltigkeit $M_0 = W_0$ ist also das Nullelement in V/W_0.

1d) Ist M eine lineare Mannigfaltigkeit aus V/W_0, so sei $-M$ die Menge der Vektoren $(-y)$ mit $y \in M$. Ist $M = x + W_0$, so ist offenbar $-M = -x - W_0 = -x + W_0$ eine Mannigfaltigkeit aus V/W_0, und $M + (-M)$ besteht aus allen Vektoren $y + (-y')$ mit $y \in M$ und $y' \in M$. Es ist aber $y = x + z$, $y' = x + z'$, wobei z und z' aus W_0 sind, und folglich gilt $y + (-y') = z - z' \in W_0$. Andererseits ist $M + (-M)$ eine Mannigfaltigkeit, die in der Form $x_0 + W_0$ geschrieben werden kann, und damit gilt $M + (-M) = W_0$.

2a) Ist $M \in V/W_0$ und sind α, β beliebige reelle Zahlen, so besteht $\alpha(\beta M)$ aus allen Vektoren $\alpha(\beta y)$ mit $y \in M$. Es gilt $\alpha(\beta y) = (\alpha \cdot \beta) y$, und da $(\alpha \cdot \beta) M$ aus allen Vektoren $(\alpha \cdot \beta) y$ mit $y \in M$ besteht, ist $\alpha(\beta M) = (\alpha \cdot \beta) M$.

2b) Da jeder Vektor $y \in M$ in der Form $y = 1y$ geschrieben werden kann, ist $M = 1M$ für jedes $M \in V/W_0$.

3a) Ist α eine reelle Zahl, so ist $\alpha(M_1 + M_2)$ die Menge aller Vektoren $\alpha(y_1 + y_2)$ mit $y_1 \in M_1$, $y_2 \in M_2$. Es ist aber $\alpha(y_1 + y_2) = \alpha y_1 + \alpha y_2$. Die Menge aller Vektoren $\alpha y_1 + \alpha y_2$ bezeichneten wir mit $\alpha M_1 + \alpha M_2$, so daß $\alpha(M_1 + M_2) = \alpha M_1 + \alpha M_2$ ist.

3b) Sind α und β reelle Zahlen und ist $M = x + W_0 \in V/W_0$, so besteht $\alpha M + \beta M$ aus allen Vektoren $\alpha y + \beta y'$ mit $y \in M$ und $y' \in M$. Es ist $y = x + z$ und $y' = x + z'$, wobei z und z' aus W_0 sind, und folglich besteht $\alpha M + \beta M$ aus allen Vektoren $\alpha x + \alpha z + \beta x + \beta z' = (\alpha + \beta) x + (\alpha z + \beta z')$. Diese Vektoren bilden aber die Mannigfaltigkeit $(\alpha + \beta) x + W_0 = (\alpha + \beta) M$.

Damit ist der Satz XI bewiesen.

Den linearen Vektorraum V/W_0 nennt man den *Faktorraum von V nach dem Teilraum W_0*.

Nehmen wir nun wieder an, daß W_0 der Kern einer linearen Abbildung A von V in V' ist und bezeichnet $\bar{A}$ die in (12) definierte Abbildung, so gilt:

XII. *Die Abbildung $\bar{A}$ ist linear, und der Faktorraum $V/W_0 = V/A^{-1}\{o'\}$ von V nach dem Kern der linearen Abbildung A ist zum Bild AV der linearen Abbildung A isomorph.*

Die zweite Aussage dieses Satzes folgt unmittelbar aus der ersten, da wir bereits wissen, daß $\bar{A}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V/W_0 auf AV ist.

Es seien $M_1 = x_1 + W_0$ und $M_2 = x_2 + W_0$ zwei Mannigfaltigkeiten aus V/W_0. Dann ist $M_1 + M_2 = (x_1 + x_2) + W_0$, und es gilt

$$\bar{A}(M_1 + M_2) = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \bar{A}(M_1) + \bar{A}(M_2).$$

Ist $M = x + W_0 \in V/W_0$ und α eine reelle Zahl, so ist $\alpha M = \alpha x + W_0$, und es gilt

$$\bar{A}(\alpha M) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha\bar{A}(M),$$

womit die Linearität der Abbildung $\bar{A}$ bewiesen ist. Wir erhalten ferner den Satz

XIII. *Ist W_0 ein beliebiger Teilraum des linearen Vektorraumes V und bilden wir den Faktorraum V/W_0 wie oben angegeben, so ist die Abbildung A_{W_0}, die durch die Gleichung*

$$A_{W_0}x \underset{\text{Def.}}{=} x + W_0 \tag{13}$$

definiert wird, eine lineare Abbildung von V auf den Faktorraum V/W_0, deren Kern W_0 ist.

Man nennt A_{W_0} die *kanonische lineare Abbildung von V auf den Faktorraum V/W_0*. Der obige Satz besagt insbesondere, daß jeder Teilraum W_0 eines Vektorraumes V als Kern einer linearen Abbildung aufgefaßt werden kann. Beachten wir noch die Definitionsgleichung (5) für das Produkt zweier linearer Abbildungen, so folgt:

XIV. *Ist A eine lineare Abbildung des linearen Vektorraumes V in den linearen Vektorraum V' und ist $W_0 = A^{-1}\{o'\}$ der Kern der linearen Abbildung A, so gilt $A = \bar{A}A_{W_0}$.*

Nach Satz XIII ist A_{W_0} eine lineare Abbildung von V auf V/W_0, und V/W_0 ist der Definitionsbereich der Abbildung $\bar{A}$; also ist das Produkt $\bar{A}A_{W_0}$ definiert. Ist $x \in V$, so ist $A_{W_0}x = x + W_0$ und $\bar{A}A_{W_0}x = \bar{A}(x + W_0) = Ax$, womit der Satz XIV bewiesen ist.

Beweis von Satz XIII. Zunächst ist A_{W_0} offenbar eine Abbildung von V auf V/W_0, und es gilt $A_{W_0}(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + W_0$. Bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit $x_1 + W_0$ mit M_1 und $x_2 + W_0$ mit M_2, so ist $A_{W_0}x_1 = M_1$, $A_{W_0}x_2 = M_2$, und da $(x_1 + x_2) + W_0 = M_1 + M_2$ ist, folgt $A_{W_0}(x_1 + x_2) = M_1 + M_2 = A_{W_0}x_1 + A_{W_0}x_2$. Ferner gilt $A_{W_0}(\alpha x) = \alpha x + W_0 = \alpha M = \alpha A_{W_0}x$, wenn $M = x + W_0 = A_{W_0}x$ ist. Das Element $W_0 \in V/W_0$ ist Nullelement im Faktorraum, und es ist $A_{W_0}z = z + W_0 = W_0$ dann und nur dann, wenn $z \in W_0$ ist. Der Teilraum W_0 von V ist also das vollständige Urbild des Nullelements $W_0 \in V/W_0$ und mithin der Kern der Abbildung A_{W_0}.

Zum Abschluß dieser Überlegungen beweisen wir noch einen Satz über die Dimension des Faktorraumes V/W_0.

XV. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und W_0 ein linearer Teilraum von V, so ist der Faktorraum V/W_0 endlichdimensional, und es gilt* $\dim V/W_0 = \dim V - \dim W_0$.

Der Faktorraum V/W_0 ist endlichdimensional nach Satz VIII als Bild des endlichdimensionalen Vektorraumes V bei der linearen Abbildung A_{W_0}. Ferner ist $\dim V/W_0 = \dim A_{W_0}V = r(A_{W_0})$ und $\dim W_0 = d(A_{W_0})$. Nach Satz X ist $d(A_{W_0}) + r(A_{W_0}) = \dim W_0 + \dim V/W_0 = \dim V$, womit der Satz XV bewiesen ist. *

7. AUFGABEN

1. Man beweise die in den Beispielen 1^0–15^0 angegebenen Behauptungen.
2. Man bestimme Bild und Kern sowie Rang und Defekt für die im Beispiel 8^0 definierten linearen Abbildungen D und I.

Bezeichnet A die im Beispiel 3^0 definierte lineare Abbildung von R^n in P_n und A_1 die entsprechende lineare Abbildung von R^{n+1} in P_{n+1}, so berechne man die lineare Abbildung $A_1^{-1}IA$.

Für welche Polynome $p \in P_n$ gilt die Gleichung $DIp = p$, und für welche Polynome $p \in P_n$ gilt die Gleichung $IDp = p$?

3. Ist A eine lineare Abbildung von V in V', so beweise man durch vollständige Induktion

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \cdots + \alpha_n A x_n.$$

4. Man beweise: Eine lineare Abbildung A des Vektorraumes V in den Vektorraum V' ist dann und nur dann umkehrbar eindeutig, wenn $A^{-1}\{o'\} = o$ ist.

5.* Man definiere das Produkt von n linearen Abbildungen und formuliere und beweise das verallgemeinerte assoziative Gesetz der Multiplikation von linearen Abbildungen.

6.* Sind V, V', V'' lineare Vektorräume, A und A'_1 lineare Abbildungen, für die das Produkt $A_1 = A'_1 A$ erklärt ist, so zeige man $A_1^{-1}\{o''\} = A^{-1}\{A_1'^{-1}\{o''\}\}$.

7. Es seien V, V', V'' lineare Vektorräume. Man beweise: Gibt es eine reguläre lineare Abbildung A_0 von V auf V', so läßt sich jede lineare Abbildung $A'' \in \mathscr{A}(V, V'')$ in der Form $A'' = A'A_0$ schreiben, wobei $A' \in \mathscr{A}(V', V'')$ ist.

Wie lautet der entsprechende Satz, falls eine reguläre Abbildung A'_0 von V' auf V'' existiert?

8.* Man beweise folgende „Isomorphiesätze":

a) Ist V ein linearer Vektorraum, W_1 ein linearer Teilraum von V und W_2 ein linearer Teilraum von W_1, so gilt

$$(V/W_1)/(W_1/W_2) \cong V/W_2.$$

b) Ist V ein linearer Vektorraum und sind W_1, W_2 lineare Teilräume von V, so gilt

$$(W_1 + W_2)/W_2 \cong W_1/(W_1 \cap W_2).$$

Aus dem Isomorphiesatz b) läßt sich die folgende Aussage über die direkte Summe zweier linearer Teilräume folgern:

$$(W_1 \dotplus W_2)/W_2 \cong W_1, \quad (W_1 \dotplus W_2)/W_1 \cong W_2.$$

9.* Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ und M eine lineare Mannigfaltigkeit in V, so ist $M' = AM$ eine lineare Mannigfaltigkeit in V'.

10.* Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ und M' eine lineare Mannigfaltigkeit in V', so ist $M = A^{-1}M'$ eine lineare Mannigfaltigkeit in V oder leer.

§ 9. LINEARE ABBILDUNGEN ENDLICHDIMENSIONALER VEKTORRÄUME

1. EINLEITUNG

In diesem Paragraphen werden nur endlichdimensionale lineare Vektorräume betrachtet. Wählt man in einem solchen Vektorraum eine feste Basis, so lassen sich seine Vektoren durch reelle Zahlen, ihre Koordinaten, beschreiben. Wir werden sehen, daß sich in entsprechender Weise auch die linearen Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraumes in einen anderen, ebenfalls endlichdimensionalen Vektorraum nach Auszeichnung einer Basis in jedem der beiden Vektorräume durch reelle Zahlen beschreiben lassen. Die dazu erforderlichen Überlegungen führen zum Begriff der

Matrix, und durch die Übertragung der im vorhergehenden Paragraphen für das Rechnen mit linearen Abbildungen bewiesenen Sätze erhalten wir die Grundzüge der sogenannten Matrizenrechnung.

2. LINEARE ABBILDUNGEN UND MATRIZEN

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in einen linearen Vektorraum V'. Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ eine Basis von V, so erhalten wir zunächst den folgenden Satz:

I. *Die lineare Abbildung A ist durch die Bilder $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n$ der Basisvektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ von V eindeutig bestimmt.*

Zum Beweis betrachten wir eine lineare Abbildung $\boldsymbol{B} \in \mathscr{A}(V, V')$, von der wir annehmen, daß sie auf den Basisvektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ mit der Abbildung A übereinstimmt:

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Ist $\boldsymbol{x} \in V$ ein beliebiger Vektor, so ist

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Für das Bild $A\boldsymbol{x}$ des Vektors $\boldsymbol{x}$ bei der linearen Abbildung A gilt

$$A\boldsymbol{x} = \alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n A\boldsymbol{x}_n,$$

und entsprechend ist

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_n.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt dann $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ für jeden Vektor $\boldsymbol{x} \in V$. Damit ist $A = \boldsymbol{B}$.

Wir nehmen nun an, daß der Vektorraum V' ebenfalls endlichdimensional ist und die Dimension n' besitzt. Es sei $\mathfrak{B}' = \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n'}\}$ eine Basis von V'. Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in V', so lassen sich die Bilder der Basisvektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ des Vektorraumes V, die nach Satz I die Abbildung A bestimmen, mit Hilfe der Basis $\mathfrak{B}'$ von V' ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'1}\boldsymbol{x}'_{n'}, \\ A\boldsymbol{x}_2 &= \alpha_{12}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'2}\boldsymbol{x}'_{n'}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\boldsymbol{x}_n &= \alpha_{1n}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{2n}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'n}\boldsymbol{x}'_{n'}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n'1}$ sind die Koordinaten des Vektors $A\boldsymbol{x}_1$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$. Entsprechend sind $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n'2}; \ldots; \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{n'n}$ die Koordinaten der Vektoren $A\boldsymbol{x}_2; \ldots; A\boldsymbol{x}_n$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$.

Bedienen wir uns des Summenzeichens, so können wir die Gleichungen (2) in der folgenden, kürzeren Form schreiben:

$$Ax_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i} x'_{i'} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2'}$$

Jeder linearen Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ entsprechen bei einer festen Basis $\mathfrak{B}$ von V und $\mathfrak{B}'$ von V' $n \cdot n'$ Zahlen $\alpha_{i'i} \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $i' = 1, 2, \dots, n'$), die Koordinaten der Bilder Ax_i der Basisvektoren von V in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$. Es ist üblich, diese $n \cdot n'$ Zahlen in Form eines rechteckigen Schemas anzuordnen, das zwischen doppelte senkrechte Striche oder große Klammern gesetzt wird:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \dots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \dots & \alpha_{n'n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ein rechteckiges Schema der Form (3) nennt man eine *Matrix vom Typ* (n', n) oder eine *Matrix mit n' Zeilen und n Spalten.* Ist $n' = n$, so spricht man von einer *n-reihigen quadratischen* Matrix. Häufig bedient man sich der abgekürzten Schreibweise

$$A_{n',n} \quad \text{oder} \quad \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} \tag{3'}$$

für die Matrizen der Form (3), wobei die Indizes n', n fortgelassen werden, wenn der Typ der betrachteten Matrix aus dem Zusammenhang klar hervorgeht. Die Indizes i' und i nennt man den *Zeilenindex* bzw. den *Spaltenindex der Matrix*; die in der Matrix stehenden Zahlen $\alpha_{i'i} \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $i' = 1, 2, \dots, n'$) heißen die *Elemente der Matrix*.

Ist A eine lineare Abbildung von V in V', so bezeichnen wir die ihr zugeordnete Matrix mit $\|A\| = A$, wobei wir die Indizes n', n fortlassen, da diese als Dimensionen der Vektorräume V bzw. V' durch die Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ bestimmt sind.

Verstehen wir unter $\mathscr{A}_{n',n}$ die Menge aller Matrizen vom Typ (n', n), so können wir unsere Überlegungen zu folgendem Satz zusammenfassen:

II. *Jeder linearen Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ entspricht bei einer festen Basis $\mathfrak{B}$ von V und $\mathfrak{B}'$ von V' eine Matrix $\|A\| = A \in \mathscr{A}_{n',n}$. Dabei ist $n = \dim V$ und $n' = \dim V'$.*

Die Spalten der Matrix A sind die Koordinaten der Bilder Ax_i der Basisvektoren von V in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$ von V'.

Die lineare Abbildung A ist durch die zugeordnete Matrix A eindeutig bestimmt.

Es bleibt lediglich die letzte Aussage zu beweisen: Sind A, $B \in \mathscr{A}(V, V')$ und ist $\|A\| = \|B\|$, so ist $A = B$.

Zwei Matrizen A und B heißen gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und die Elemente an einander entsprechenden Stellen übereinstimmen. Die Matrizengleichung

$A = \|\alpha_{i'i}\|_{m',m} = \|\beta_{j'j}\|_{n',n} = B$ steht also stellvertretend für die Gleichungen $m' = n'$, $m = n$ und $\alpha_{i'i} = \beta_{i'i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n')$.

Zum Beweis von Satz II nehmen wir an, daß $\|\boldsymbol{A}\| = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ und $\|\boldsymbol{B}\| = \|\beta_{i'i}\|_{n',n}$ ist. Dann gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i}\boldsymbol{x}'_{i'} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \beta_{i'i}\boldsymbol{x}'_{i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der Voraussetzung $\|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{B}\|$ erhalten wir die Gleichungen

$$\alpha_{i'i} = \beta_{i'i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n')$$

und daraus

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Abbildungen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ stimmen also auf den Basisvektoren der Basis $\mathfrak{B}$ von V überein, und nach Satz I ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Wir haben festgestellt, daß sich die linearen Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraumes V in einen endlichdimensionalen Vektorraum V' bei Auszeichnung einer Basis $\mathfrak{B}$ von V und einer Basis $\mathfrak{B}'$ von V' durch rechteckige Schemata von reellen Zahlen, sogenannte Matrizen, eindeutig beschreiben lassen. Es erhebt sich die Frage, ob jedes rechteckige Schema reeller Zahlen, mit anderen Worten, ob jede Matrix vom Typ (n', n) auch eine lineare Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum V' beschreiben kann.

Es seien V und V' lineare Vektorräume der Dimension n bzw. n', und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ seien Basen von V bzw. V'. Wir betrachten eine beliebige Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$. Berücksichtigen wir die zweite Aussage von Satz II, so können wir zunächst jedem Basisvektor $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Basis $\mathfrak{B}$ von V einen Vektor $\boldsymbol{y}'_i \in V'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des Vektorraumes V' zuordnen:

$$\boldsymbol{y}'_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{2i}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Koeffizienten $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{n'i}$ sind die Elemente der i-ten Spalte der gegebenen Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$, und $\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n'}$ sind die Basisvektoren der Basis $\mathfrak{B}'$ von V'. Wenn es eine lineare Abbildung $\boldsymbol{A} \in \mathscr{A}(V, V')$ gibt, für die $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist, so ist diese Abbildung nach Satz I eindeutig bestimmt, und überdies gilt $\|\boldsymbol{A}\| = A$.

Wir definieren die Abbildung $\boldsymbol{A}$. Es sei $\boldsymbol{x} \in V$ ein beliebiger Vektor, dann läßt sich $\boldsymbol{x}$ durch seine Koordinaten und die Basis $\mathfrak{B}$ von V ausdrücken:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n.$$

Es sei

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \underset{\text{Def.}}{=} \alpha_1\boldsymbol{y}'_1 + \alpha_2\boldsymbol{y}'_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{y}'_n. \tag{4}$$

Zunächst ist $\boldsymbol{A}$ eine Abbildung von V in V', und es gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Wir beweisen die Linearität der Abbildung $\boldsymbol{A}$. Sind $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n$

und $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$ zwei Vektoren aus V, so gilt

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) x_n,$$

da sich die Koordinaten addieren, wenn die Vektoren addiert werden. Ferner ist für $\alpha \in R$

$$\alpha x = (\alpha \cdot \alpha_1) x_1 + (\alpha \cdot \alpha_2) x_2 + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_n) x_n.$$

Wenden wir die Abbildung A an und berücksichtigen die Definitionsgleichung (4), so gilt

$$\begin{aligned} A(x + y) &= (\alpha_1 + \beta_1) y'_1 + (\alpha_2 + \beta_2) y'_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) y'_n \\ &= \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \cdots + \alpha_n y'_n + \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + \cdots + \beta_n y'_n \\ &= Ax + Ay, \end{aligned}$$

da $Ay = \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + \cdots + \beta_n y'_n$ ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= (\alpha \cdot \alpha_1) y'_1 + (\alpha \cdot \alpha_2) y'_2 + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_n) y'_n \\ &= \alpha(\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \cdots + \alpha_n y'_n) = \alpha A x. \end{aligned}$$

Es ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$.

III. *Jeder Matrix* $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} \in \mathscr{A}_{n',n}$ *entspricht bei einer festen Basis* $\mathfrak{B}$ *in* V *und* $\mathfrak{B}'$ *in* V' *eine lineare Abbildung* $A \in \mathscr{A}(V, V')$, *so daß* $\|A\| = A$ *ist.*

Aus den Sätzen I—III erhalten wir als Folgerung:

IV. *Zwischen der Menge* $\mathscr{A}(V, V')$ *der linearen Abbildungen des n-dimensionalen Vektorraumes* V *in den* n'*-dimensionalen Vektorraum* V' *und der Menge* $\mathscr{A}_{n',n}$ *aller Matrizen vom Typ* (n', n) *besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung.*

Für einige der im vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele von linearen Abbildungen bestimmen wir die zugehörigen Matrizen:

1°. Es sei A die in § 8, Nr. 2, 1° definierte lineare Abbildung von R^2 in Ω. Wir wählen in den Vektorräumen R^2 und Ω eine Basis in der Form $\mathfrak{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathfrak{B}' = \{1, i\}$. Dann ist

$$A(1, 0) = 1 + 0i,$$
$$A(0, 1) = 0 + 1i,$$

und die Matrix $\|A\|$ erhält die Form

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Wählen wir an Stelle der Basis $\mathfrak{B}$ die Basis $\mathfrak{B}_1 = \{(1, 1), (1, 0)\}$, so erhalten wir

$$A(1, 1) = 1 + 1i,$$
$$A(1, 0) = 1 + 0i,$$

und die zugeordnete Matrix $\|A\|$ erhält die Form

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Es ist offensichtlich, daß *die einer linearen Abbildung A zugeordnete Matrix von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ in den betrachteten linearen Vektorräumen abhängt.*

2⁰.* Wir betrachten den linearen Vektorraum R^4 der Quadrupel $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ von reellen Zahlen. Es bezeichne π die folgende Permutation der Zahlen 1, 2, 3 und 4:

$$\pi(1) = 2, \quad \pi(2) = 4, \quad \pi(3) = 1, \quad \pi(4) = 3.$$

A_π sei die durch $A_\pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_2, \xi_4, \xi_1, \xi_3)$ definierte lineare Abbildung von R^4 auf sich. Wir wählen in $V = R^4$ die kanonische Basis

$$\mathfrak{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

und da $V' = V = R^4$ ist, setzen wir $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$. Die Basiselemente bezeichnen wir mit e_1, e_2, e_3, e_4 und erhalten die Gleichungen

$$A_\pi e_1 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4,$$
$$A_\pi e_2 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$
$$A_\pi e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4,$$
$$A_\pi e_4 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4.$$

Bei der genannten Basiswahl entspricht der linearen Abbildung A_π die Matrix

$$\|A_\pi\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.*$$

3⁰. Wir betrachten schließlich die in § 8, Nr. 2, 8⁰ genannten linearen Abbildungen D und I von P_n in P_{n-1} bzw. P_{n+1} und wählen in den Vektorräumen P_n, P_{n-1} und P_{n+1} die Potenzen von t als Basiselemente: $\mathfrak{B}_n = \{t^0, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ ist eine Basis von P_n, $\mathfrak{B}_{n-1} = \{t^0, t, t^2, \ldots, t^{n-2}\}$ ist eine Basis von P_{n-1} und $\mathfrak{B}_{n+1} = \{t^0, t, t^2, \ldots, t^n\}$ ist eine Basis von P_{n+1}. Dann gilt

$$Dt^0 = 0t^0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^{n-2},$$
$$Dt = 1t^0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^{n-2},$$
$$Dt^2 = 0t^0 + 2t + 0t^2 + \cdots + 0t^{n-2},$$
$$Dt^3 = 0t^0 + 0t + 3t^2 + \cdots + 0t^{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Dt^{n-1} = 0t^0 + 0t + 0t^2 + \cdots + (n-1)\, t^{n-2}$$

und

$$It^0 = 0t^0 + 1t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots + 0t^n,$$
$$It = 0t^0 + 0t + {}^1/_2 t^2 + 0t^3 + \cdots + 0t^n,$$
$$It^2 = 0t^0 + 0t + 0t^2 + {}^1/_3 t^3 + \cdots + 0t^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$It^{n-1} = 0t^0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots + \frac{1}{n} t^n.$$

Es ergeben sich die Matrizen

$$\|D\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{Vmatrix} = D_{n-1,\,n}$$

und

$$\|I\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {}^1/_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{Vmatrix} = I_{n+1,n}.$$

3. DER LINEARE VEKTORRAUM $\mathscr{A}_{n',n}$; DIE ADDITION VON MATRIZEN UND IHRE MULTIPLIKATION MIT REELLEN ZAHLEN; DIE ABBILDUNG $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$; DIE DIMENSION DES VEKTORRAUMES $\mathscr{A}_{n',n}$

In § 8, Nr. 3 haben wir für die linearen Abbildungen der Menge $\mathscr{A}(V, V')$ eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt. Diese Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen übertragen wir vermöge der angegebenen Zuordnung auf die Menge $\mathscr{A}_{n',n}$.

In dem Vektorraum V bzw. V' der Dimension n bzw. n' wählen wir eine Basis $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$, die wir im folgenden festhalten. Wir betrachten zwei lineare Abbildungen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathscr{A}(V, V')$, bezeichnen die ihnen (bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$) zugeordneten Matrizen mit $\|\boldsymbol{A}\| = A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ bzw. $\|\boldsymbol{B}\| = B = \|\beta_{i'i}\|_{n',n}$ und berechnen die der linearen Abbildung $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ (bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$) zugeordnete Matrix $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\|$. Ist

$$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}' = \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n'}\},$$

so ist

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{2i}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}\boldsymbol{x}'_{n'},$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i = \beta_{1i}\boldsymbol{x}'_1 + \beta_{2i}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \beta_{n'i}\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}_i = (\alpha_{1i} + \beta_{1i})\,\boldsymbol{x}'_1 + (\alpha_{2i} + \beta_{2i})\,\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + (\alpha_{n'i} + \beta_{n'i})\,\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und für die Matrix $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\|$ erhalten wir

$$\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| = \|\alpha_{i'i} + \beta_{i'i}\|_{n',n}.$$

In der Menge $\mathscr{A}_{n',n}$ der Matrizen vom Typ (n', n) definieren wir eine *Addition* durch die Gleichung

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \cdots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n'1} & \beta_{n'2} & \cdots & \beta_{n'n} \end{Vmatrix} \underset{\text{Def.}}{=} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} + \beta_{n'1} & \alpha_{n'2} + \beta_{n'2} & \cdots & \alpha_{n'n} + \beta_{n'n} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Diese Gleichung schreiben wir kürzer in der Form

$$A + B = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} + \|\beta_{i'i}\|_{n',n} = \|\alpha_{i'i} + \beta_{i'i}\|_{n',n}. \tag{5'}$$

Sind A und B lineare Abbildungen und $\|A\|$, $\|B\|$ die zugehörigen Matrizen, so gilt

$$\|A + B\| = \|A\| + \|B\|. \tag{6}$$

Wir weisen besonders darauf hin, daß die *Addition nur für Matrizen gleichen Typs* erklärt ist.

Betrachten wir nun die lineare Abbildung αA mit $\alpha \in R$ und bestimmen die Matrix $\|\alpha A\|$, so gilt zunächst $(\alpha A)\, x_i = \alpha(A x_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und damit

$$(\alpha A)\, x_i = (\alpha \cdot \alpha_{1i})\, x_1' + (\alpha \cdot \alpha_{2i})\, x_2' + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_{n'i})\, x_{n'}' \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir erhalten

$$\|\alpha A\| = \|\alpha \cdot \alpha_{i'i}\|_{n',n}$$

und definieren die *Multiplikation mit reellen Zahlen* für Matrizen aus $\mathscr{A}_{n',n}$ durch

$$\alpha \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \ldots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix} \underset{\text{Def.}}{=} \begin{Vmatrix} \alpha \cdot \alpha_{11} & \alpha \cdot \alpha_{12} & \ldots & \alpha \cdot \alpha_{1n} \\ \alpha \cdot \alpha_{21} & \alpha \cdot \alpha_{22} & \ldots & \alpha \cdot \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot \alpha_{n'1} & \alpha \cdot \alpha_{n'2} & \ldots & \alpha \cdot \alpha_{n'n} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Diese Gleichung schreiben wir kürzer in der Form

$$\alpha A = \alpha\|\alpha_{i'i}\|_{n',n} = \|\alpha \cdot \alpha_{i'i}\|_{n',n}. \tag{7'}$$

Ist A eine lineare Abbildung und $\|A\|$ die zugehörige Matrix, so gilt für jedes $\alpha \in R$

$$\|\alpha A\| = \alpha\|A\|. \tag{8}$$

In der Menge $\mathscr{A}_{n',n}$ der Matrizen vom Typ (n', n) haben wir eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt.

Die Summe zweier Matrizen vom Typ (n', n) ist eine Matrix vom Typ (n', n), die aus den Summanden dadurch entsteht, daß einander entsprechende Elemente (d. h. Elemente mit gleichen Indizes) addiert werden.

Das Produkt einer Matrix vom Typ (n', n) mit einer reellen Zahl ist eine Matrix vom Typ (n', n) die aus der ursprünglichen dadurch entsteht, daß alle ihre Elemente mit der gegebenen reellen Zahl multipliziert werden.

Wir beweisen den Satz

V. *Die Menge $\mathscr{A}_{n',n}$ der Matrizen vom Typ (n', n) ist ein linearer Vektorraum der Dimension $n \cdot n'$.*

Die durch $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A) = \|A\|$ definierte Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ ist ein Isomorphismus des linearen Vektorraumes $\mathscr{A}(V, V')$ auf den linearen Vektorraum $\mathscr{A}_{n',n}$.

Wir müssen die in der Definition des linearen Vektorraumes in § 1, Nr. 2 angegebenen Eigenschaften für die Addition von Matrizen und die Multiplikation von Matrizen mit reellen Zahlen nachweisen. Dazu benutzen wir, daß die Addition linearer Abbildungen sowie deren Multiplikation mit reellen Zahlen diese Eigenschaften besitzen (vgl. § 8, Nr. 3, Satz IV) und übertragen sie auf die Addition von Matrizen sowie deren Multiplikation mit reellen Zahlen durch die Gleichungen (6) und (8).

Es seien A, B und C beliebige Matrizen vom Typ (n', n). Wir betrachten zwei lineare Vektorräume V und V' der Dimension n bzw. n', in denen je eine Basis $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ ausgezeichnet sei und bezeichnen die den gegebenen Matrizen A, B, C entsprechenden linearen Abbildungen von V in V' mit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Dann ist $\|\boldsymbol{A}\| = A$, $\|\boldsymbol{B}\| = B$, $\|\boldsymbol{C}\| = C$, und es gilt:

1a) $$(A + B) + C = (\|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|) + \|\boldsymbol{C}\| = \|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{C}\| = \|(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}\|$$
$$= \|\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\| = \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}\| = \|\boldsymbol{A}\| + (\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{C}\|)$$
$$= A + (B + C).$$

1b) $$A + B = \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{A}\| = B + A.$$

1c) Ist $O = \|\boldsymbol{O}\|$, die der Nullabbildung $\boldsymbol{O}$ entsprechende Matrix, so gilt

$$A + O = \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{O}\| = \|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O}\| = \|\boldsymbol{A}\| = A.$$

Da die Abbildung $\boldsymbol{O}$ durch die Gleichung $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}'$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$ definiert ist, gilt insbesondere

$$\boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}' = 0\boldsymbol{x}'_1 + 0\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + 0\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Matrix $O = \|0\|_{n', n}$ heißt *Nullmatrix*. Sämtliche Elemente der Nullmatrix sind gleich Null.

1d) Ist $(-A) = \|-\boldsymbol{A}\|$, so gilt

$$A + (-A) = \|\boldsymbol{A}\| + \|-\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A})\| = \|\boldsymbol{O}\| = O,$$

und damit ist $(-A) = \|-\boldsymbol{A}\|$ die zu A negative Matrix. Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n', n}$, so gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{x}'_1 + \alpha_{2i}\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die lineare Abbildung $(-\boldsymbol{A})$ ist durch die Gleichung $(-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$ definiert; also gilt

$$(-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}_i = -\alpha_{1i}\boldsymbol{x}'_1 - \alpha_{2i}\boldsymbol{x}'_2 - \cdots - \alpha_{n'i}\boldsymbol{x}'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und damit $(-A) = \|-\alpha_{i'i}\|_{n', n}$.

In der zu A negativen Matrix $(-A)$ werden alle Elemente durch ihre Negativen ersetzt.

2a) Es seien $\alpha, \beta \in R$, dann gilt

$$\alpha(\beta A) = \alpha(\beta\|A\|) = \alpha\|\beta A\| = \|\alpha(\beta A)\| = \|(\alpha\cdot\beta)A\| = (\alpha\cdot\beta)\|A\|$$
$$= (\alpha\cdot\beta)A.$$

2b) $1A = 1\|A\| = \|1A\| = \|A\| = A.$

3a) Es sei $\alpha \in R$, dann gilt

$$\alpha(A + B) = \alpha(\|A\| + \|B\|) = \alpha\|A + B\| = \|\alpha(A + B)\| = \|\alpha A + \alpha B\|$$
$$= \|\alpha A\| + \|\alpha B\| = \alpha\|A\| + \alpha\|B\| = \alpha A + \alpha B.$$

3b) Sind $\alpha, \beta \in R$, so ist

$$(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)\|A\| = \|(\alpha + \beta)A\| = \|\alpha A + \beta A\| = \|\alpha A\| + \|\beta A\|$$
$$= \alpha\|A\| + \beta\|A\| = \alpha A + \beta A.$$

Wir haben bewiesen, daß die Menge $\mathscr{A}_{n',n}$ der Matrizen vom Typ (n', n) ein linearer Vektorraum ist.

Um die Dimension dieses Vektorraumes zu bestimmen, betrachten wir die Matrizen

$$e_{i_0'i_0} = \|\varepsilon_{i'i}\|_{n',n} = \|\delta_{i'i_0'}\cdot\delta_{ii_0}\|_{n',n},$$

für die $\varepsilon_{i_0'i_0} = 1$ und $\varepsilon_{i'i} = 0$ für $i' \neq i_0'$ oder $i \neq i_0$ ist. In der Matrix $e_{i_0'i_0}$ ist das Element in der Zeile mit dem Index i_0' und der Spalte mit dem Index i_0 gleich 1, während alle anderen Elemente gleich Null sind. Ausführlich können wir die Matrix $e_{i_0'i_0}$ in folgender Form schreiben:

$$e_{i_0'i_0} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1. & 2. & \dots & (i_0-1). & i_0. & (i_0+1). & \dots & n. \end{matrix} \text{ Spalte} \\ \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} 1.\ \text{Zeile} \\ 2. \\ \vdots \\ (i_0'-1). \\ i_0'. \\ (i_0'+1). \\ \vdots \\ n'. \end{matrix} \end{array}$$

Zunächst gibt es $n \cdot n'$ Matrizen $e_{i_0'i_0}$, da die Indizes i_0' bzw. i_0 unabhängig voneinander die Zahlen $1, 2, \dots, n'$ bzw. $1, 2, \dots, n$ durchlaufen. Betrachten wir $n \cdot n'$ Zahlen $\alpha_{i_0'i_0} \in R$ und bilden die Linearkombination

$$\sum_{i_0'=1}^{n'} \sum_{i_0=1}^{n} \alpha_{i_0'i_0} e_{i_0'i_0} = \alpha_{11}e_{11} + \dots + \alpha_{n'1}e_{n'1}$$
$$+ \alpha_{12}e_{12} + \dots + \alpha_{n'2}e_{n'2} + \dots + \alpha_{1n}e_{1n} + \dots + \alpha_{n'n}e_{n'n},$$

so erhalten wir im Ergebnis die Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$:

$$A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} = \sum_{i'=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}\, e_{i'i}. \tag{9}$$

Die Gleichung

$$\sum_{i'=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}\, e_{i'i} = O,$$

wobei O die Nullmatrix, d. h. das Nullelement des Vektorraumes $\mathscr{A}_{n',n}$ bezeichnet, erhält nach (9) die Form

$$\|\alpha_{i'i}\|_{n',n} = \|0\|_{n',n},$$

und das bedeutet

$$\alpha_{i'i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n').$$

Die Matrizen $e_{i_0'i_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i_0' = 1, 2, \ldots, n')$ *sind linear unabhängige Elemente des linearen Vektorraumes* $\mathscr{A}_{n',n}$.

Andererseits folgt aus der Gleichung (9), daß die Elemente $e_{i_0'i_0}$ $(i_0 = 1, 2, \ldots, n;$ $i_0' = 1, 2, \ldots, n')$ den linearen Vektorraum $\mathscr{A}_{n',n}$ erzeugen, und wir erhalten:

Die $n \cdot n'$ *Matrizen* $e_{11}, \ldots, e_{n'1}; e_{12}, \ldots, e_{n'2}; \ldots; e_{1n}, \ldots, e_{n'n}$ *bilden eine Basis des linearen Vektorraumes* $\mathscr{A}_{n',n}$. *Insbesondere ist* $\dim \mathscr{A}_{n',n} = n \cdot n'$.

Wir betrachten schließlich die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$, die durch die Gleichung

$$\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A) \underset{\text{Def.}}{=} \|A\|$$

definiert ist. Die Indizes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ sollen daran erinnern, daß die Matrix $\|A\|$ von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$ von V und $\mathfrak{B}'$ von V' abhängt. Dann ist $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ nach den Sätzen II—IV eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Vektorraumes $\mathscr{A}(V, V')$ der linearen Abbildungen von V in V' auf den Vektorraum $\mathscr{A}_{n',n}$ der Matrizen vom Typ (n', n). Die Gleichungen (6) und (8) erhalten die Form

$$\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A + B) = \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A) + \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(B) \tag{6'}$$

und

$$\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(\alpha A) = \alpha \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A). \tag{8'}$$

Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ *ist also linear* und folglich ein *Isomorphismus von* $\mathscr{A}(V, V')$ *auf* $\mathscr{A}_{n',n}$.

Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ ist regulär, und aus $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(\mathscr{A}(V, V')) = \mathscr{A}_{n',n}$ ergibt sich die Gleichung $\dim \mathscr{A}_{n',n} = r(\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}) = \dim \mathscr{A}(V, V')$. Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

VI. *Sind* V *und* V' *lineare Vektorräume der Dimension* n *und* n', *so ist die Menge der linearen Abbildungen* $\mathscr{A}(V, V')$ *von* V *in* V' *ein linearer Vektorraum der Dimension* $n \cdot n'$.

4. DIE MULTIPLIKATION VON MATRIZEN

Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ benutzen wir, um auch die in § 8, Nr. 4 erklärte Multiplikation von linearen Abbildungen auf die Matrizen zu übertragen.

Wir betrachten drei lineare Vektorräume V, V' und V'', deren Dimensionen wir mit n, n' bzw. n'' bezeichnen. Es sei $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in V' und $A' \in \mathscr{A}(V', V'')$ eine lineare Abbildung von V' in V''. Für diesen Fall haben wir das Produkt $A'A$ als Nacheinanderausführung der linearen Abbildungen A und A' erklärt. Wir betrachten die zugehörigen Matrizen und zeichnen zunächst in jedem der Vektorräume V, V' und V'' eine Basis aus. Es sei $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V, $\mathfrak{B}' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}\}$ eine Basis von V' und $\mathfrak{B}'' = \{x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n''}\}$ eine Basis von V''. Dann erhalten wir die Matrix $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A) = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ aus den Gleichungen

$$Ax_i = \alpha_{1i}x'_1 + \alpha_{2i}x'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}x'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die der Abbildung A' zugeordnete Matrix $\Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}(A') = \|\alpha'_{i''i'}\|_{n'',n'}$ ist vom Typ (n'', n'), und ihre Elemente werden durch folgende Gleichungen definiert:

$$A'x'_{i'} = \alpha'_{1i'}x''_1 + \alpha'_{2i'}x''_2 + \cdots + \alpha'_{n''i'}x''_{n''} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n').$$

Für das Produkt $A'A$ der linearen Abbildungen A und A' ergibt sich zunächst

$$(A'A)\,x_i = A'(Ax_i) = A'\left(\sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i}x'_{i'}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Berücksichtigen wir die Linearität der Abbildung A', so folgt

$$(A'A)\,x_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i}A'x'_{i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir die oben angegebenen Ausdrücke für $A'x'_{i'}$ ein, so gilt

$$(A'A)\,x_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i}\left(\sum_{i''=1}^{n''} \alpha'_{i''i'}x_{i''}\right) = \sum_{i'=1}^{n'}\sum_{i''=1}^{n''} \alpha_{i'i}(\alpha'_{i''i'}x_{i''})$$

und damit

$$(A'A)\,x_i = \sum_{i'=1}^{n'}\sum_{i''=1}^{n''} (\alpha_{i'i}\cdot\alpha'_{i''i'})\,x''_{i''} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Elemente der Matrix $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}(A'A)$ erhalten wir als Koordinaten der Vektoren $(A'A)\,x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'' = \{x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n''}\}$. Wir müssen in der letzten Gleichung die Reihenfolge der Summationen vertauschen. Gleichzeitig vertauschen wir die Faktoren in den Koeffizienten und erhalten

$$(A'A)\,x_i = \sum_{i''=1}^{n''}\sum_{i'=1}^{n'} (\alpha'_{i''i'}\cdot\alpha_{i'i})\,x''_{i''} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Es ist also

$$\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}(A'A) = \left\| \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{i''i'} \cdot \alpha_{i'i} \right\|_{n'',n}$$

Im Hinblick auf diese Gleichung definieren wir das *Produkt der Matrix* $A' = \|\alpha'_{i''i'}\|_{n'',n'}$ *vom Typ* (n'', n') *mit der Matrix* $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ *vom Typ* (n', n) durch die Gleichung

$$\begin{Vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \dots & \alpha'_{1n'} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n''1} & \alpha'_{n''2} & \dots & \alpha'_{n''n'} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \dots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix}$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \begin{Vmatrix} \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{1i'} \cdot \alpha_{i'1} & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{1i'} \cdot \alpha_{i'2} & \dots & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{1i'} \cdot \alpha_{i'n} \\ \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{2i'} \cdot \alpha_{i'1} & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{2i'} \cdot \alpha_{i'2} & \dots & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{2i'} \cdot \alpha_{i'n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{n''i'} \cdot \alpha_{i'1} & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{n''i'} \cdot \alpha_{i'2} & \dots & \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{n''i'} \cdot \alpha_{i'n} \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Diese Definitionsgleichung schreiben wir kürzer in der Form

$$A' \cdot A = \|\alpha'_{i''i'}\|_{n'',n'} \cdot \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} = \left\| \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{i''i'} \cdot \alpha_{i'i} \right\|_{n'',n}. \tag{11'}$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß das Produkt $A' \cdot A$ der Matrix A' mit der Matrix A nur dann erklärt ist, wenn die Anzahl der Spalten des linken Faktors mit der Anzahl der Zeilen des rechten Faktors übereinstimmt. Eine Matrix vom Typ (m', m) kann man nur dann mit einer Matrix vom Typ (n', n) von rechts multiplizieren, wenn $m = n'$ ist. Man erhält eine Matrix vom Typ (m', n). Wie bei der Multiplikation von linearen Abbildungen machen wir darauf aufmerksam, daß das Produkt $A \cdot A'$ nicht erklärt zu sein braucht, wenn das Produkt $A' \cdot A$ erklärt ist. Sind A und A' quadratische Matrizen gleicher Ordnung, so sind beide Produkte $A \cdot A'$ und $A' \cdot A$ erklärt, jedoch kann das Ergebnis der Multiplikation in beiden Fällen verschieden sein, wofür wir später Beispiele kennenlernen werden.

Aus den obigen Überlegungen und der Definition der Matrizenmultiplikation erhalten wir als multiplikatives Gegenstück zu den Gleichungen (6) und (8) aus Nr. 3 die Gleichung

$$\|A'A\| = \|A'\| \cdot \|A\| \tag{12}$$

oder besser

$$\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}(A'A) = \Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}(A') \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A). \tag{12'}$$

Diese Gleichung gestattet die Übertragung von § 8, Nr. 4, Satz VI auf die Multiplikation von Matrizen.

VII. *Sind A, A' und A'' gegebene Matrizen der Typen (n', n), (n'', n') und (n''', n''), so ist $A'' \cdot (A' \cdot A) = (A'' \cdot A') \cdot A$. Für die Matrizenmultiplikation gilt das assoziative Gesetz.*

Zum Beweis betrachten wir vier lineare Vektorräume: V, V', V'' und V''' der Dimensionen n, n', n'' bzw. n''', und es seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{B}'''$ je eine feste Basis von V, V', V'' und V'''. Die gegebenen Matrizen A, A' und A'' definieren lineare Abbildungen $A \in \mathscr{A}(V, V')$, $A' \in \mathscr{A}(V', V'')$ und $A'' \in \mathscr{A}(V'', V''')$, für die $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A = A$, $\Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}A' = A'$ und $\Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' = A''$ ist. Nach (12) und § 8, Nr. 4, Satz VI erhalten wir für das Produkt $A'' \cdot (A' \cdot A) = \Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' \cdot (\Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}A' \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A)$

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' \cdot (\Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}A' \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A) &= \Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}''}A'A = \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'''}A''(A'A) \\ &= \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'''}(A''A')\,A = \Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}'''}A''A' \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A \\ &= (\Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' \cdot \Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}A') \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A\end{aligned}$$

und da $(\Phi_{\mathfrak{B}'',\mathfrak{B}'''}A'' \cdot \Phi_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}''}A') \cdot \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A = (A'' \cdot A') \cdot A$ ist, folgt die Behauptung.

Die Verallgemeinerung des assoziativen Gesetzes der Matrizenmultiplikation auf n Faktoren durch vollständige Induktion überlassen wir wiederum dem Leser. Wir weisen lediglich darauf hin, daß man in einem Produkt von Matrizen Klammern in beliebiger Weise setzen und weglassen darf.

5. ZEILEN- UND SPALTENMATRIZEN UND DAS RECHNEN MIT IHNEN

Um das Rechnen mit Matrizen etwas näher kennenzulernen, betrachten wir eine Reihe von Spezialfällen und Beispielen.

4⁰. Die Matrizen vom Typ $(1, n)$ besitzen nur eine Zeile und n Spalten. Wir erhalten sie in der Form

$$\|\alpha_{i'i}\|_{1,n} = \|\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}\|.$$

Diese Matrizen heißen *Zeilenmatrizen*, und es ist üblich, den ersten Index fortzulassen. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Zeilenmatrizen mit kleinen lateinischen Buchstaben mit einem umgekehrten Dach:

$$\check{a} = \|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\|.$$

Nach Satz V *bilden die Zeilenmatrizen einen linearen Vektorraum $\mathscr{A}_{1,n} = \check{\mathscr{A}}_n$ der Dimension n.* Eine Basis $\check{\mathfrak{B}}_n$ von $\check{\mathscr{A}}_n$, die wir im folgenden die *kanonische Basis* von $\check{\mathscr{A}}_n$ nennen, erhalten wir in der Form

$$\check{e}_1 = \|1, 0, \ldots, 0\|,\ \check{e}_2 = \|0, 1, \ldots, 0\|,\ \ldots,\ \check{e}_n = \|0, 0, \ldots, 1\|.$$

Die durch die Gleichung

$$\check{\Phi}_n(\|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\|) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

definierte Abbildung $\check{\Phi}_n$ ist, wie man leicht nachweist, ein Isomorphismus von $\check{\mathscr{A}}_n$ auf R^n.

5⁰. Die Matrizen vom Typ $(n', 1)$ besitzen n' Zeilen und nur eine Spalte. Wir erhalten sie in der Form

$$\|\alpha_{i'i}\|_{n',1} = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{n'1}\end{matrix}\right\|.$$

Diese Matrizen heißen *Spaltenmatrizen*, und es ist üblich, den zweiten Index fortzulassen. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Spaltenmatrizen mit kleinen lateinischen Buchstaben mit einem Dach:

$$\hat{a} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n'} \end{Vmatrix}.$$

Nach Satz V *bilden die Spaltenmatrizen einen linearen Vektorraum* $\mathscr{A}_{n',1} = \hat{\mathscr{A}}_{n'}$ *der Dimension* n'. Eine Basis $\mathfrak{B}_{n'}$ von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$, die wir im folgenden die *kanonische Basis* von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$ nennen, erhalten wir in der Form

$$\hat{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \quad \hat{e}_{n'} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Die durch die Gleichung

$$\hat{\Phi}_{n'}\left(\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n'} \end{Vmatrix}\right) \underset{\text{Def.}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n'})$$

definierte Abbildung $\hat{\Phi}_{n'}$ von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$ auf $R^{n'}$ weist man wiederum leicht als Isomorphismus nach.

6⁰. Will man eine Spaltenmatrix vom Typ $(n', 1)$ mit einer Zeilenmatrix vom Typ $(1, n)$ von links multiplizieren, so muß offenbar $n' = n$ sein. Als Ergebnis erhält man eine Matrix vom Typ $(1, 1)$. Wir bilden das Produkt

$$\check{a} \cdot \hat{b} = \|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\| \cdot \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Vmatrix} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i \right\|_{1,1}.$$

Das einzige Element

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \beta_n$$

der Produktmatrix erhält man, indem man die Elemente mit gleichen Indizes multipliziert und über die n so erhaltenen Produkte summiert.

Betrachten wir zwei beliebige Matrizen $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ und $A' = \|\alpha_{i''i'}\|_{n'',n'}$, für die das Produkt $A' \cdot A$ erklärt ist, so können wir die Multiplikation etwas näher erläutern. Bezeichnen wir nämlich die i_0''-te Zeile der Matrix A' als Zeilenmatrix mit $\check{a}'_{i_0''}$,

$$\check{a}'_{i_0''} = \|\alpha'_{i_0''1}, \alpha'_{i_0''2}, \ldots, \alpha'_{i_0''n'}\|,$$

und bezeichnen wir entsprechend die i_0-te Spalte der Matrix A als Spaltenmatrix mit $\hat{a}_{i_0}$,

$$\hat{a}_{i_0} = \begin{Vmatrix} \alpha_{1i_0} \\ \alpha_{2i_0} \\ \vdots \\ \alpha_{n'i_0} \end{Vmatrix},$$

so erhalten wir als Produkt $\check{a}'_{i_0''} \cdot \hat{a}_{i_0}$ die einelementige Matrix $\left\| \sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{i_0''i'} \cdot \alpha_{i'i_0} \right\|$. Erinnern wir uns der Definitionsgleichung (11) für das Produkt $A' \cdot A$, so ist $\sum_{i'=1}^{n'} \alpha'_{i_0''i'} \cdot \alpha_{i'i_0}$ das Element der Produktmatrix, das in der i_0''-ten Zeile und i_0-ten Spalte steht.

Man erhält das Element mit den Indizes i_0'', i_0 *in der Produktmatrix* $A' \cdot A$ *als das Produkt der* i_0''*-ten Zeile* $\check{a}'_{i_0''}$ *der Matrix* A' *mit der* i_0*-ten Spalte* $\hat{a}_{i_0}$ *der Matrix* A.

Die Multiplikation von Matrizen haben wir dadurch auf die Multiplikation von Zeilenmatrizen mit Spaltenmatrizen zurückgeführt.

7⁰. Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Matrix $A = \|\alpha_{\nu\iota}\|_{3,3}$ vom Typ (3, 3), die wir von links mit den Matrizen

$$A_1' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{und} \quad A_2' = \begin{Vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

multiplizieren wollen. Es ist

$$\hat{a}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{Vmatrix}, \quad \hat{a}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{Vmatrix}, \quad \hat{a}_3 = \begin{Vmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{Vmatrix}.$$

Im ersten Fall ist $\check{a}_1' = \|1\ 0\ 0\| = \check{e}_1$, $\check{a}_2' = \|0\ 0\ 1\| = \check{e}_3$ und $\check{a}_3' = \|0\ 1\ 0\| = \check{e}_2$. Dabei ist $\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3$ die kanonische Basis von $\check{\mathscr{A}}_3$. Wir erhalten

$$\check{a}_1' \cdot \hat{a}_i = \check{e}_1 \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{1i}\|,$$

$$\check{a}_2' \cdot \hat{a}_i = \check{e}_3 \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{3i}\|,$$

$$\check{a}_3' \cdot \hat{a}_i = \check{e}_2 \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{2i}\| \quad (i = 1, 2, 3)$$

und damit für das Produkt

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{Vmatrix}.$$

Im zweiten Fall ist $\check{a}_1' = \|1\ \beta\ \gamma\|$, $\check{a}_2' = \|0\ 1\ \delta\|$ und $\check{a}_3' = \|0\ 0\ 1\| = \check{e}_3$, und wir erhalten

$$\check{a}_1' \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{1i} + \beta \cdot \alpha_{2i} + \gamma \cdot \alpha_{3i}\|,$$

$$\check{a}_2' \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{2i} + \delta \cdot \alpha_{3i}\|,$$

$$\check{a}_3' \cdot \hat{a}_i = \|\alpha_{3i}\| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für das Produkt ergibt sich

$$\begin{Vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \beta \cdot \alpha_{21} + \gamma \cdot \alpha_{31} & \alpha_{12} + \beta \cdot \alpha_{22} + \gamma \cdot \alpha_{32} & \alpha_{13} + \beta \cdot \alpha_{23} + \gamma \cdot \alpha_{33} \\ \alpha_{21} + \delta \cdot \alpha_{31} & \alpha_{22} + \delta \cdot \alpha_{32} & \alpha_{23} + \delta \cdot \alpha_{33} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}.$$

Wir betrachten noch die Produkte $A \cdot A_1'$ und $A \cdot A_2'$, die wir in den genannten Fällen ebenfalls bilden können. Zunächst sei $\check{a}_1 = \|\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \alpha_{13}\|$, $\check{a}_2 = \|\alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \alpha_{23}\|$, $\check{a}_3 = \|\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{33}\|$. Im ersten Fall ist

$$\hat{a}_1' = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \hat{e}_1, \quad \hat{a}_2' = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \hat{e}_3, \quad \hat{a}_3' = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \hat{e}_2.$$

Dabei bezeichnet $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ die kanonische Basis von $\hat{\mathscr{A}}_3$.

Es ergibt sich

$$\check{a}_i \cdot \hat{a}_1 = \check{a}_i \cdot \hat{e}_1 = \|\alpha_{i1}\|,$$

$$\check{a}_i \cdot \hat{a}_2 = \check{a}_i \cdot \hat{e}_3 = \|\alpha_{i3}\|,$$

$$\check{a}_i \cdot \hat{a}_3 = \check{a}_i \cdot \hat{e}_2 = \|\alpha_{i2}\| \quad (i = 1, 2, 3)$$

und für das Produkt

$$\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{32}\end{Vmatrix}.$$

Die Berechnung des Produktes für den zweiten Fall überlassen wir dem Leser. Wir bemerken nur noch, daß für eine Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{3,3}$, für die $\alpha_{12} \neq \alpha_{13}$ ist, die Produkte $A_1' \cdot A$ und $A \cdot A_1'$ offenbar verschieden sind.

8^0. Betrachten wir die in § 8, Nr. 2, 8^0 erklärte lineare Abbildung D als lineare Abbildung von P_n in sich und wählen in P_n die Basis $\mathfrak{B} = \{t^0, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$, so entspricht der Abbildung D die quadratische Matrix

$$D = \begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{Vmatrix}$$

(vgl. auch 3^0). Für die Matrix D gilt $D^n = O$, wobei O die Nullmatrix bezeichnet.

6. DER RANG EINER MATRIX

Aus dem in § 8, Nr. 5 eingeführten Begriff des Ranges einer linearen Abbildung wollen wir den für die Matrizenrechnung und für die Theorie der linearen Gleichungen wesentlichen Begriff des Ranges einer Matrix ableiten.

Es sei $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ eine gegebene Matrix vom Typ (n', n). Wir betrachten die linearen Vektorräume $\hat{\mathscr{A}}_n$ und $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$ der Spaltenmatrizen vom Typ $(n, 1)$ und $(n', 1)$ und die kanonische Basis $\mathfrak{B}_n$ bzw. $\mathfrak{B}_{n'}$ in $\hat{\mathscr{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$. Nach Satz III entspricht der Matrix A eine lineare Abbildung $\hat{A}$ von $\hat{\mathscr{A}}_n$ in $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$, und wir definieren den *Rang* $r = r(A) = r(\|\alpha_{i'i}\|_{n',n})$ *der Matrix A* durch die Gleichung

$$r(A) \underset{\text{Def.}}{=} r(\hat{A}). \tag{13}$$

Eine Matrix A, für die die zugehörige Abbildung $\hat{A}$ regulär ist, nennen wir *regulär*.

Nach § 8, Nr. 5 ist $r(\hat{A}) = \dim \hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$, und wir wollen den Bildraum $\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$ etwas näher untersuchen. Dazu betrachten wir die Bilder $\hat{A}\hat{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ der kanonischen Basisvektoren von $\hat{\mathscr{A}}_n$, die nach § 8, Nr. 5 ein Erzeugendensystem von $\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$ bilden. Es ist

$$\hat{A}\hat{e}_i = \alpha_{1i}\hat{e}_1' + \alpha_{2i}\hat{e}_2' + \cdots + \alpha_{n'i}\hat{e}_{n'}'$$

und damit

$$\hat{A}\hat{e}_i = \begin{Vmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\\ \vdots\\ \alpha_{n'i}\end{Vmatrix} = \hat{a}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Aus der Gleichung

$$r(\hat{A}) = \dim \hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n = \dim L(\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n\})$$

erhalten wir den folgenden Satz:

VIII. *Der Rang einer Matrix A ist gleich der Dimension des von ihren Spalten erzeugten Teilraumes von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$.*

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Spalten.

Eine Matrix A ist dann und nur dann regulär, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind.

Den zweiten Teil von Satz VIII erhält man aus dem ersten durch die Bemerkung, daß jedes Erzeugendensystem eine Basis enthält. Unter den n Spalten der Matrix gibt es also $r = r(A)$ linear unabhängige, während je $r + 1$ Spalten linear abhängig sind. Der dritte Teil von Satz VIII ergibt sich unmittelbar aus der Definition einer regulären Matrix und § 8, Nr. 5, Satz IX.

*Wir betrachten zwei beliebige Vektorräume V und V' der Dimensionen n bzw. n' und wählen in jedem von ihnen eine feste Basis $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$. Eine gegebene Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ definiert dann eine lineare Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$, und wir können nach dem Rang dieser Abbildung fragen. Es ist $r(A) = \dim AV$. Die lineare Abbildung A ist durch die Bilder

$$Ax_i = \alpha_{1i}x'_1 + \alpha_{2i}x'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}x'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

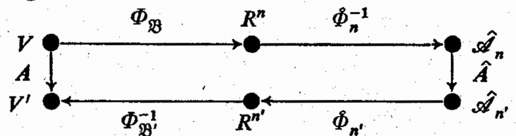
der Basisvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Basis $\mathfrak{B}$ von V eindeutig bestimmt.

Wir wollen die Abbildung A in anderer Weise beschreiben. Dazu betrachten wir die in § 5, Nr. 3 definierte Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$, die den Vektorraum V auf den Vektorraum R^n abbildet. Entsprechend sei $\Phi_{\mathfrak{B}'}$ die in § 5, Nr. 3 definierte lineare Abbildung von V' auf $R^{n'}$. Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, so ist $\Phi_{\mathfrak{B}}x_i = e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wenn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die kanonische Basis von R^n bezeichnet. Entsprechend gelten für $\mathfrak{B}' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}\}$ die Gleichungen $\Phi_{\mathfrak{B}'}x'_{i'} = e'_{i'}$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$, wenn $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n'}$ die kanonische Basis von $R^{n'}$ bezeichnet. Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}'}$ ist eine reguläre lineare Abbildung von V' auf $R^{n'}$ und besitzt nach § 8, Nr. 4, Satz VII eine Inverse $\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}$. Die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}$ ist eine reguläre lineare Abbildung von $R^{n'}$ auf V', und es gilt $\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}e'_i = x'_i$. Unter 5^0 haben wir einen Isomorphismus $\hat{\Phi}_{n'}$ von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$ auf $R^{n'}$ definiert, für den offenbar $\hat{\Phi}_{n'}\hat{e}'_{i'} = e'_{i'}$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$ gilt. Dabei ist $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \ldots, \hat{e}'_{n'}\} = \hat{\mathfrak{B}}'_{n'}$ die kanonische Basis von $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$. Entsprechend sei $\hat{\Phi}_n$ der in 5^0 definierte Isomorphismus von $\hat{\mathscr{A}}_n$ auf R^n, für den $\hat{\Phi}_n\hat{e}_i = e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt. Dabei ist $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\} = \hat{\mathfrak{B}}_n$ die kanonische Basis von $\hat{\mathscr{A}}_n$. Die Abbildung $\hat{\Phi}_n$ besitzt als reguläre lineare Abbildung von $\hat{\mathscr{A}}_n$ auf R^n eine Inverse $\hat{\Phi}_n^{-1}$, und es ist $\hat{\Phi}_n^{-1}e_i = \hat{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Wir veranschaulichen die bisher betrachteten Vektorräume und Abbildungen durch ein sogenanntes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{B}}} & R^n & \xrightarrow{\hat{\Phi}_n^{-1}} & \hat{\mathscr{A}}_n \\ V' & \xleftarrow[\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}]{} & R^{n'} & \xleftarrow[\hat{\Phi}_{n'}]{} & \hat{\mathscr{A}}_{n'} \end{array}$$

Betrachten wir noch die durch die Matrix A definierte Abbildung $\hat{A}$ von $\hat{\mathscr{A}}_n$ in $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$, so können wir die Abbildungen $\Phi_{\mathfrak{B}}, \hat{\Phi}_n^{-1}, \hat{A}, \hat{\Phi}_{n'}, \Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}$ nacheinander ausführen und erhalten eine Abbildung von V

in V'. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung gleich A ist, d. h., wir wollen das obige Diagramm vervollständigen:



Zum Beweis betrachten wir einen Basisvektor $x_i \in \mathfrak{B}$. Dann gilt $\Phi_{\mathfrak{B}} x_i = e_i$. Hierauf wenden wir die Abbildung $\hat{\Phi}_n^{-1}$ an und erhalten $\hat{\Phi}_n^{-1} e_i = \hat{e}_i$. Wenden wir nun die Abbildung $\hat{A}$ an, so ergibt sich

$$\hat{A}\hat{e}_i = \alpha_{1i}\hat{e}_1' + \alpha_{2i}\hat{e}_2' + \cdots + \alpha_{n'i}\hat{e}_{n'}' = \hat{a}_i .$$

Es ist

$$\hat{\Phi}_{n'}\hat{a}_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{n'i}) = \alpha_{1i}e_1' + \alpha_{2i}e_2' + \cdots + \alpha_{n'i}e_{n'}'$$

und

$$\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}(\alpha_{1i}e_1' + \alpha_{2i}e_2' + \cdots + \alpha_{n'i}e_{n'}') = \alpha_{1i}x_1' + \alpha_{2i}x_2' + \cdots + \alpha_{n'i}x_{n'}' = Ax_i .$$

Die Nacheinanderausführung oder Multiplikation der obigen Abbildungen stimmt also für jeden Basisvektor $x_i \in \mathfrak{B}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) mit der Abbildung A überein. Da nach Satz I eine lineare Abbildung durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt ist, erhalten wir die Gleichung

$$A = \Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}\hat{\Phi}_{n'}\hat{A}\hat{\Phi}_n^{-1}\Phi_{\mathfrak{B}} .$$

Betrachten wir das Bild des ganzen Vektorraumes V, so ist $\Phi_{\mathfrak{B}} V = R^n$. Ferner gilt $\hat{\Phi}_n^{-1}R^n = \hat{\mathscr{A}}_n$. Das Bild von $\hat{\mathscr{A}}_n$ bei der Abbildung $\hat{A}$ bezeichnen wir mit $\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$, und es ist $r(\mathbf{A}) = \dim \hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$. Die Abbildung $\hat{\Phi}_{n'}$ ist regulär, also gilt $\dim(\hat{\Phi}_{n'}\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n) = \dim \hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n$, und da auch $\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}$ eine reguläre Abbildung ist, erhalten wir

$$\dim(\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}\hat{\Phi}_{n'}\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n) = r(\mathbf{A}) .$$

Es ist aber $\Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}\hat{\Phi}_{n'}\hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n = \Phi_{\mathfrak{B}'}^{-1}\hat{\Phi}_{n'}\hat{A}\hat{\Phi}_n^{-1}\Phi_{\mathfrak{B}} V = AV$, und folglich gilt

$$r(A) = \dim AV = \dim \hat{A}\hat{\mathscr{A}}_n = r(\mathbf{A}) = r(\|\alpha_{i'i}\|_{n',n}) .$$

IX. *Ist* $\mathbf{A}$ *eine Matrix und* $A \in \mathscr{A}(V, V')$ *eine dieser Matrix zugeordnete lineare Abbildung, so ist* $r(A) = r(\mathbf{A})$. *Die Matrix* $\mathbf{A}$ *ist dann und nur dann regulär, wenn die lineare Abbildung* A *regulär ist.* ✱

Wir beweisen noch einen Satz, den wir im folgenden Abschnitt zur Bestimmung des Ranges einer Matrix verwenden werden.

X. *Ist* $\mathbf{A}$ *eine Matrix vom Typ* (n', n) *und sind* $\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ *reguläre* n'- *bzw.* n-*reihige quadratische Matrizen, so ist der Rang der Matrizen* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ *und* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ *gleich dem Rang der Matrix* $\mathbf{A}$.

Der Rang einer Matrix bleibt unverändert, wenn man sie von links oder rechts mit einer regulären quadratischen Matrix multipliziert.

Wir betrachten die den gegebenen Matrizen zugeordneten linearen Abbildungen $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$, wobei wir die kanonischen Basen in $\hat{\mathscr{A}}_n$ und $\hat{\mathscr{A}}_{n'}$ zugrunde legen. Dabei ist $\hat{A} \in \mathscr{A}(\hat{\mathscr{A}}_n, \hat{\mathscr{A}}_{n'})$, $\hat{B} \in \mathscr{A}(\hat{\mathscr{A}}_{n'}, \hat{\mathscr{A}}_{n'})$ und $\hat{C} \in \mathscr{A}(\hat{\mathscr{A}}_n, \hat{\mathscr{A}}_n)$. Das Bild $\hat{C}\hat{\mathscr{A}}_n$ ist ein Teilraum von $\hat{\mathscr{A}}_n$, und da $\hat{C}$ regulär ist, gilt $\dim \hat{C}\hat{\mathscr{A}}_n = n$. Folglich ist $\hat{C}\hat{\mathscr{A}}_n = \hat{\mathscr{A}}_n$. Zwischen den gegebenen Matrizen und den linearen Abbildungen $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ bestehen

folgende Gleichungen:

$$A = \|\hat{A}\| = \Phi_{\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_{n'}} \hat{A}, \quad B = \|\hat{B}\| = \Phi_{\mathfrak{B}_{n'}, \mathfrak{B}_{n''}} \hat{B}, \quad C = \|\hat{C}\| = \Phi_{\mathfrak{B}_{n'''}, \mathfrak{B}_n} \hat{C}.$$

Ferner gilt

$$B \cdot A = \|\hat{B}\| \cdot \|\hat{A}\| = \|\hat{B}\hat{A}\|, \quad A \cdot C = \|\hat{A}\| \cdot \|\hat{C}\| = \|\hat{A}\hat{C}\|$$

und

$$r(B \cdot A) = r(\hat{B}\hat{A}), \quad r(A \cdot C) = r(\hat{A}\hat{C}).$$

Es genügt, den folgenden allgemeinen Satz über lineare Operatoren zu beweisen:

XI. *Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$, $B \in \mathscr{A}(V', V'')$ und $C \in \mathscr{A}(V''', V)$, so gilt*

$$r(BA) = r(A) = r(AC),$$

wenn B eine reguläre lineare Abbildung von V' in V'' und C eine lineare Abbildung von V''' auf V ist.

Zum Beweis betrachten wir den Vektorraum AV. Da B regulär ist, gilt nach § 8, Nr. 5, Satz IX

$$\dim (B(AV)) = \dim AV,$$

und da C den Vektorraum V''' auf den Vektorraum V abbildet, ist $V = CV'''$, also

$$\dim (A(CV''')) = \dim AV.$$

Nach Definition des Produktes von linearen Abbildungen ist $B(AV) = (BA)\,V$ und $A(CV''') = (AC)\,V'''$ und

$$r(BA) = \dim ((BA)\,V) = \dim AV = r(A),$$

$$r(AC) = \dim ((AC)\,V''') = \dim AV = r(A).$$

7. EINE METHODE ZUR BESTIMMUNG DES RANGES EINER MATRIX

In diesem Abschnitt beschreiben wir eine Methode zur Berechnung des Ranges einer gegebenen Matrix.

Zunächst beweisen wir den folgenden Satz:

XII. *Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man*

1. *zwei Zeilen der Matrix miteinander vertauscht,*
2. *zwei Spalten der Matrix miteinander vertauscht,*
3. *ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert,*
4. *ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.*

Es sei $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ eine gegebene Matrix. Zum Beweis der ersten beiden Behauptungen betrachten wir die m-reihige quadratische Matrix

$$s_{ij}^{(m)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(Spalte i und Spalte j sind oben markiert.)

Bezeichnen wir die k-te Spalte dieser Matrix mit $\widehat{(s_{ij}^{(m)})_k}$, so gilt offenbar

$$\widehat{(s_{ij}^{(m)})_k} = \begin{cases} \hat{e}_k & \text{für } k \neq i, k \neq j, \\ \hat{e}_j & \text{für } k = i, \\ \hat{e}_i & \text{für } k = j. \end{cases}$$

Die Spalten der Matrix $s_{ij}^{(m)}$ stimmen also bis auf die Reihenfolge mit der kanonischen Basis des Vektorraumes $\hat{\mathscr{A}}_m$ überein und sind folglich linear unabhängig. Aus dem Satz VIII folgt:

Es ist $r(s_{ij}^{(m)}) = m$; $s_{ij}^{(m)}$ ist eine reguläre Matrix.

Für die Zeilen $\widecheck{(s_{ij}^{(m)})_k}$ der Matrix $s_{ij}^{(m)}$ gilt entsprechend

$$\widecheck{(s_{ij}^{(m)})_k} = \begin{cases} \check{e}_k & \text{für } k \neq i \text{ und } k \neq j, \\ \check{e}_j & \text{für } k = i, \\ \check{e}_i & \text{für } k = j. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Spalten der Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ wie gewohnt mit $\hat{a}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, setzen $m = n'$ und berechnen das Produkt $s_{ij}^{(n')} \cdot A = B = \|\beta_{k'k}\|_{n',n}$, so erhalten wir für das Element $\beta_{k'k}$ mit den Indizes k', k

$$\|\beta_{k'k}\|_{1,1} = \widecheck{(s_{ij}^{(n')})_{k'}} \cdot \hat{a}_k = \begin{cases} \check{e}_{k'} \cdot \hat{a}_k = \|\alpha_{k'k}\|_{1,1} & \text{für } k' \neq i, k' \neq j, \\ \check{e}_j \cdot \hat{a}_k = \|\alpha_{jk}\|_{1,1} & \text{für } k' = i, \\ \check{e}_i \cdot \hat{a}_k = \|\alpha_{ik}\|_{1,1} & \text{für } k' = j. \end{cases}$$

Es ist also $\beta_{ik} = \alpha_{jk}$, $\beta_{jk} = \alpha_{ik}$ und $\beta_{k'k} = \alpha_{k'k}$, falls $k' \neq i$ und $k' \neq j$ ist.

Die Matrix $s_{ij}^{(n')} \cdot A$ entsteht aus der Matrix A durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile.

Entsprechend beweist man:

Die Matrix $A \cdot s_{ij}^{(n)}$ entsteht aus der Matrix A durch Vertauschung der i-ten und j-ten Spalte.

In diesem Zusammenhang erinnern wir den Leser an das Beispiel 7°. Da $s_{ij}^{(m)}$ für jedes m eine reguläre quadratische Matrix ist, bleibt der Rang der Matrix A ungeändert, wenn sie von links oder rechts mit einer Matrix dieser Art multipliziert wird, und die Aussagen 1 und 2 von Satz XII sind bewiesen.

Zum Beweis der übrigen Aussagen betrachten wir die m-reihige quadratische Matrix

$$t_{ij}^{(m)}(\alpha) = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

(Spalte i und Spalte j oben markiert.)

Bezeichnen wir die k-te Spalte dieser Matrix mit $\widehat{(t_{ij}^{(m)}(\alpha))_k}$, so gilt

$$\widehat{(t_{ij}^{(m)}(\alpha))_k} = \begin{cases} \hat{e}_k & \text{für } k \neq j, \\ \hat{e}_j + \alpha \hat{e}_i & \text{für } k = j. \end{cases}$$

Ist

$$\beta_1 \hat{e}_1 + \cdots + \beta_i \hat{e}_i + \cdots + \beta_j(\hat{e}_j + \alpha \hat{e}_i) + \cdots + \beta_m \hat{e}_m = \hat{o},$$

so gilt

$$\beta_1 \hat{e}_1 + \cdots + (\beta_i + \alpha \cdot \beta_j)\, \hat{e}_i + \cdots + \beta_j \hat{e}_j + \cdots + \beta_m \hat{e}_m = \hat{o},$$

und da die $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ linear unabhängig sind, erhalten wir die Gleichungen

$$\beta_1 = \cdots = \beta_i + \alpha \cdot \beta_j = \cdots = \beta_j = \cdots = \beta_m = 0.$$

Dann muß aber $\beta_1 = \cdots = \beta_i = \cdots = \beta_j = \cdots = \beta_m = 0$ sein, und die Spalten der Matrix $t_{ij}^{(m)}(\alpha)$ sind linear unabhängig.

Es ist $r(t_{ij}^{(m)}(\alpha)) = m$; $t_{ij}^{(m)}(\alpha)$ ist eine reguläre Matrix.

Für die Zeilen $\widecheck{(t_{ij}^{(m)}(\alpha))_k}$ der Matrix $t_{ij}^{(m)}(\alpha)$ gilt

$$\widecheck{(t_{ij}^{(m)}(\alpha))_k} = \begin{cases} \check{e}_k & \text{für} \quad k \neq i, \\ \check{e}_i + \alpha \check{e}_j & \text{für} \quad k = i. \end{cases}$$

Betrachten wir das Produkt $t_{ij}^{(n')}(\alpha) \cdot A = B = \|\beta_{k'k}\|_{n',n}$, so erhalten wir für das Element $\beta_{k'k}$ mit den Indizes k', k

$$\|\beta_{k'k}\|_{1,1} = \widecheck{(t_{ij}^{(n')}(\alpha))_{k'}} \cdot \hat{a}_k = \begin{cases} \check{e}_{k'} \cdot \hat{a}_k = \|\alpha_{k'k}\|_{1,1} & \text{für} \quad k' \neq i, \\ (\check{e}_i + \alpha \check{e}_j)\, \hat{a}_k = \|\alpha_{ik} + \alpha \cdot \alpha_{jk}\| & \text{für} \quad k' = i. \end{cases}$$

Es ist also $\beta_{ik} = \alpha_{ik} + \alpha \cdot \alpha_{jk}$ und $\beta_{k'k} = \alpha_{k'k}$ für $k' \neq i$.

Die Matrix $t_{ij}^{(n')}(\alpha) \cdot A$ entsteht aus der Matrix A durch Addition der mit α multiplizierten j-ten Zeile zur i-ten Zeile.

Entsprechend beweist man:

Die Matrix $A \cdot t_{ij}^{(n)}(\alpha)$ entsteht aus der Matrix A durch Addition der mit α multiplizierten i-ten Spalte zur j-ten Spalte.

Wir verweisen abermals auf das Beispiel 7°.

Da $t_{ij}^{(m)}(\alpha)$ für jedes m eine reguläre quadratische Matrix ist, ergeben sich die Aussagen 3 und 4 von Satz XII.

Die im Satz XII unter 1—4 genannten Operationen verwenden wir zur Bestimmung des Ranges einer gegebenen Matrix A. Sind alle Elemente $\alpha_{i'i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n')$, so besitzt die Matrix offenbar den Rang 0. Wir können also annehmen, daß ein Element $\alpha_{i_0' i_0} \neq 0$ ist. Dann vertauschen wir die i_0-te Spalte der Matrix A mit der ersten Spalte und die i_0'-te Zeile mit der ersten Zeile. Die so erhaltene Matrix bezeichnen wir mit $A' = \|\alpha'_{i'i}\|_{n',n}$. Es gilt

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha'_{11} = \alpha_{i_0' i_0} \neq 0; \quad \alpha'_{1 i_0} = \alpha_{i_0' 1}, \ \alpha'_{i_0' 1} = \alpha_{1 i_0}, \ \alpha'_{i_0' i_0} = \alpha_{11}, & & \\ \alpha'_{1i} = \alpha_{i_0' i}, \ \alpha'_{i_0' i} = \alpha_{1i} & \text{für} \quad i \neq 1, i_0, & \\ \alpha'_{i'1} = \alpha_{i' i_0}, \ \alpha'_{i' i_0} = \alpha_{i'1} & \text{für} \quad i' \neq 1, i_0', & \\ \alpha'_{i'i} = \alpha_{i'i} & \text{für} \quad i \neq 1, i_0 \quad \text{und} \quad i' \neq 1, i_0' & \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n'). & & \end{array}\right\} \quad (14)$$

Für $i' = 2, 3, \ldots, n'$ addieren wir nun sukzessive die mit $\gamma_{i'}^{(1)} = -\dfrac{\alpha'_{i'1}}{\alpha'_{11}}$ multiplizierte erste Zeile der Matrix A' zur i'-ten Zeile. Die gewonnene neue Matrix bezeichnen wir mit $A^{(1)} = \|\alpha_{i'i}^{(1)}\|_{n',n}$, und für ihre Elemente gilt

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_{1i}^{(1)} = \alpha'_{1i} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \alpha_{i'i}^{(1)} = \gamma_{i'}^{(1)} \cdot \alpha'_{1i} + \alpha'_{i'i} & (i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 2, 3, \ldots, n'), \\ \alpha_{i'1}^{(1)} = \gamma_{i'}^{(1)} \cdot \alpha'_{11} + \alpha'_{i'1} = -\alpha'_{i'1} + \alpha'_{i'1} = 0 & (i' = 2, 3, \ldots, n'), \end{array}\right\} \quad (15)$$

die Matrix $A^{(1)}$ besitzt die Form

$$A^{(1)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \dots & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(1)} & \dots & \alpha_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n'2}^{(1)} & \dots & \alpha_{n'n}^{(1)} \end{Vmatrix}.$$

Sind alle Elemente $\alpha_{i'i}^{(1)} = 0$ $(i = 2, 3, \dots, n;\ i' = 2, 3, \dots, n')$, so ist der Rang der Matrix $A^{(1)}$ und damit der Rang der Matrix A gleich 1. In diesem Fall ist unsere Aufgabe gelöst.

Wir nehmen nun an, daß ein Element $\alpha_{i_1' i_1}^{(1)} \neq 0$ ist $(2 \leqq i_1 \leqq n,\ 2 \leqq i_1' \leqq n')$. Dann vertauschen wir in der Matrix $A^{(1)}$ die i_1-te Spalte mit der zweiten Spalte und die i_1'-te Zeile mit der zweiten Zeile. Für die Elemente der entstehenden Matrix $A'^{(1)} = \|\alpha_{i'i}'^{(1)}\|_{n',n}$ gilt

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{22}'^{(1)} = \alpha_{i_1'i_1}^{(1)} \neq 0; \quad \alpha_{2i_1}'^{(1)} = \alpha_{i_1'2}^{(1)}, \quad \alpha_{i_1'2}'^{(1)} = \alpha_{2i_1}^{(1)}, \quad \alpha_{i_1'i_1}'^{(1)} = \alpha_{22}^{(1)}, \\ &\alpha_{2i}'^{(1)} = \alpha_{i_1'i}^{(1)}, \quad \alpha_{i_1'i}'^{(1)} = \alpha_{2i}^{(1)} \quad \text{für} \quad i \neq 2, i_1, \\ &\alpha_{i'2}'^{(1)} = \alpha_{i'i_1}^{(1)}, \quad \alpha_{i'i_1}'^{(1)} = \alpha_{i'2}^{(1)} \quad \text{für} \quad i' \neq 2, i_1', \\ &\alpha_{i'i}'^{(1)} = \alpha_{i'i}^{(1)} \qquad\qquad \text{für} \quad i \neq 2, i_1 \quad \text{und} \quad i' \neq 2, i_1' \\ &(i = 1, 2, \dots, n;\ i' = 1, 2, \dots, n'). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Insbesondere ist

$$\alpha_{11}'^{(1)} = \alpha_{11}^{(1)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{i'1}'^{(1)} = 0 \quad (i' = 2, 3, \dots, n').$$

Für $i' = 1, 3, \dots, n'$ addieren wir sukzessive die mit $\gamma_{i'}^{(2)} = -\dfrac{\alpha_{i'2}'^{(1)}}{\alpha_{22}'^{(1)}}$ multiplizierte zweite Zeile zur i'-ten Zeile. Für die Elemente der neu gewonnenen Matrix, die wir mit $A^{(2)} = \|\alpha_{i'i}^{(2)}\|_{n',n}$ bezeichnen, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{2i}^{(2)} = \alpha_{2i}'^{(1)} \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, n), \\ &\alpha_{i'i}^{(2)} = \gamma_{i'}^{(2)} \cdot \alpha_{2i}'^{(1)} + \alpha_{i'i}'^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ i' = 1, 3, \dots, n'), \\ &\alpha_{i'2}^{(2)} = \gamma_{i'}^{(2)} \cdot \alpha_{22}'^{(1)} + \alpha_{i'2}'^{(1)} = -\alpha_{i'2}'^{(1)} + \alpha_{i'2}'^{(1)} = 0 \quad (i' = 1, 3, \dots, n'). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Da die Elemente der ersten Spalte bei dem durchgeführten Prozeß unverändert bleiben, besitzt die Matrix $A^{(2)}$ die Form

$$A^{(2)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & 0 & \alpha_{13}^{(2)} & \dots & \alpha_{1n}^{(2)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \dots & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(2)} & \dots & \alpha_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n'3}^{(2)} & \dots & \alpha_{n'n}^{(2)} \end{Vmatrix}.$$

Dabei ist $\alpha_{11}^{(2)} \neq 0$, $\alpha_{22}^{(2)} \neq 0$. Ist eines der Elemente $\alpha_{i'i}^{(2)}$ $(i = 3, \ldots, n;\ i' = 3, \ldots, n)$ von Null verschieden, so können wir unser Verfahren abermals anwenden und erhalten eine Matrix $A^{(3)}$ der Form

$$A^{(3)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(3)} & 0 & 0 & \alpha_{14}^{(3)} & \ldots & \alpha_{1n}^{(3)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(3)} & 0 & \alpha_{24}^{(3)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(3)} & \alpha_{34}^{(3)} & \ldots & \alpha_{3n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44}^{(3)} & \ldots & \alpha_{4n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n'4}^{(3)} & \ldots & \alpha_{n'n}^{(3)} \end{Vmatrix},$$

in der $\alpha_{11}^{(3)} \neq 0$, $\alpha_{22}^{(3)} \neq 0$ und $\alpha_{33}^{(3)} \neq 0$ ist.

Setzen wir das angegebene Verfahren so lange fort, bis eine weitere Fortsetzung unmöglich ist, so erhalten wir als Ergebnis eine Matrix $A^{(r)}$ der Form

$$A^{(r)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(r)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{1,r+1}^{(r)} & \ldots & \alpha_{1n}^{(r)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(r)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{2,r+1}^{(r)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(r)} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{(r)} & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{3,r+1}^{(r)} & \ldots & \alpha_{3n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{r-1,r-1}^{(r)} & 0 & \alpha_{r-1,r+1}^{(r)} & \ldots & \alpha_{r-1,n}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{rr}^{(r)} & \alpha_{r,r+1}^{(r)} & \ldots & \alpha_{rn}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

in der die „Diagonalelemente“ $\alpha_{ii}^{(r)} \neq 0$ sind $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Addieren wir in dieser Matrix sukzessive die mit $\gamma_{i'i} = -\dfrac{\alpha_{i'i}^{(r)}}{\alpha_{i'i'}^{(r)}}$ $(i = r+1, \ldots, n;\ i' = 1, \ldots, r)$ multiplizierte i'-te Spalte zur i-ten Spalte und bezeichnen wir die neu gewonnene Matrix mit $D^{(r)} = \|\alpha_{i'} \cdot \delta_{i'i}\|_{n',n}$, so gilt

$$\alpha_{i'} = \begin{cases} \alpha_{i'i'}^{(r)} & \text{für } i' = 1, 2, \ldots, r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Matrix $D^{(r)} = \|\alpha_{i'} \cdot \delta_{i'i}\|_{n',n}$, in der alle Elemente, die nicht in der sogenannten Hauptdiagonale stehen, gleich Null sind, nennt man *Diagonalmatrix*. Sie besitzt die Form

$$D^{(r)} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{r-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

und der Rang der Matrix $D^{(r)}$ ist gleich r. Nach Satz XII ist $r = r(D^{(r)}) = r(A)$, und unsere Aufgabe, den Rang der Matrix A zu bestimmen, ist gelöst.

Bemerkung. Wir weisen den Leser darauf hin, daß sich das angegebene Verfahren noch vereinfacht, wenn man nur am Rang der Matrix A, nicht aber an der Diagonalform $D^{(r)}$ interessiert ist. In diesem Fall genügt es, durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten, zweiten usw. Zeile zu den folgenden Zeilen die Elemente unterhalb der Hauptdiagonale zu Null zu machen. Als Ergebnis erhält man eine sogenannte „Dreiecksmatrix“ (vgl. (18)), in der oberhalb der $\alpha_{22}^{(r)}, \ldots, \alpha_{rr}^{(r)}$ von Null verschiedene Zahlen stehen können. Der Rang dieser und damit der ursprünglichen Matrix ist wiederum gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente.

*Am Anfang dieses Abschnitts haben wir die auf die Matrix A zur Bestimmung ihres Ranges angewandten Operationen 1–4 von Satz XII durch die Multiplikation der Matrix A mit regulären quadratischen Matrizen von links bzw. rechts beschrieben. Betrachten wir das geschilderte Verfahren noch einmal unter diesem Aspekt, so ist

$$A' = s_{i_0'1}^{(n')} \cdot A \cdot s_{1i_0}^{(n)}.$$

Ferner ergibt sich

$$A^{(1)} = t_{n'1}^{(n')}(\gamma_{n'}^{(1)}) \cdots t_{21}^{(n')}(\gamma_2^{(1)}) \cdot A'.$$

Entsprechend ist im nächsten Schritt

$$A'^{(1)} = s_{i_1'2}^{(n')} \cdot A^{(1)} \cdot s_{2i_1}^{(n)}$$

und

$$A^{(2)} = t_{n'2}^{(n')}(\gamma_{n'}^{(2)}) \cdots t_{32}^{(n')}(\gamma_3^{(2)}) \cdot t_{12}^{(n')}(\gamma_1^{(2)}) \cdot A'^{(1)} \quad \text{usw.}$$

Setzen wir die verschiedenen Gleichungen ineinander ein, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$A^{(r)} = C' \cdot A \cdot C''.$$

In dieser Gleichung ist die Matrix C' ein Produkt von Matrizen der Form $t_{ij}^{(n')}(\gamma)$ und $s_{ij}^{(n')}$, während die Matrix C'' ein Produkt von Matrizen der Form $s_{ij}^{(n)}$ ist. Es gilt

$$C' = t_{n'r}^{(n')}(\gamma_{n'}^{(r)}) \cdots t_{r+1,r}^{(n')}(\gamma_{r+1}^{(r)}) \cdot t_{r-1,r}^{(n')}(\gamma_{r-1}^{(r)}) \cdots t_{1r}^{(n')}(\gamma_1^{(r)}) \cdot s_{i_{r-1}',r}^{(n')} \cdot t_{n',r-1}^{(n')}(\gamma_{n'}^{(r-1)})$$
$$\cdots s_{i_1'2}^{(n')} \cdot t_{n'1}^{(n')}(\gamma_{n'}^{(1)}) \cdots t_{21}^{(n')}(\gamma_2^{(1)}) \cdot s_{i_0'1}^{(n')},$$
$$C'' = s_{1i_0}^{(n)} \cdot s_{2i_1}^{(n)} \cdots s_{r,i_{r-1}}^{(n)}.$$

Für die Matrix $D^{(r)}$ erhalten wir entsprechend

$$D^{(r)} = A^{(r)} \cdot t_{1,r+1}^{(n)}(\gamma_{1,r+1}) \cdots t_{1n}^{(n)}(\gamma_{1n}) \cdot t_{2,r+1}^{(n)}(\gamma_{2,r+1}) \cdots t_{2n}^{(n)}(\gamma_{2n}) \cdots t_{r,r+1}^{(n)}(\gamma_{r,r+1}) \cdots t_{rn}^{(n)}(\gamma_{rn}).$$

Setzen wir

$$C = C'' \cdot t_{1,r+1}^{(n)}(\gamma_{1,r+1}) \cdots t_{rn}^{(n)}(\gamma_{rn}),$$

so erhalten wir

$$D^{(r)} = C' \cdot A \cdot C.$$

Die quadratischen Matrizen C' und C sind als Produkte von regulären quadratischen Matrizen selbst regulär. Wir fassen dieses Ergebnis in dem folgenden Satz zusammen:

XIII. *Zu jeder Matrix A vom Typ (n', n) gibt es zwei reguläre quadratische Matrizen C' und C, so daß das Produkt*

$$D = C' \cdot A \cdot C \tag{19}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Wir bemerken abschließend, daß sich das geschilderte Verfahren zur Bestimmung des Ranges der Matrix A auch zur Berechnung der Matrizen C' und C verwenden läßt.*

9°. Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Zunächst vertauschen wir die dritte und die erste Zeile, was einer Multiplikation mit der Matrix $s_{31}^{(5)}$ von links entspricht:

$$A' = s_{31}^{(5)} \cdot A, \quad A' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Wir addieren die mit -2 multiplizierte erste Zeile zur vierten Zeile und die mit -3 multiplizierte erste Zeile zur fünften Zeile. Das entspricht einer Multiplikation mit der Matrix $t_{51}^{(5)}(-3) \cdot t_{41}^{(5)}(-2)$ von links:

$$A^{(1)} = t_{51}^{(5)}(-3) \cdot t_{41}^{(5)}(-2) \cdot A', \quad A^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -20 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & -23 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Für ein bequemeres Rechnen vertauschen wir in dieser Matrix die zweite und dritte Zeile:

$$A'^{(1)} = s_{32}^{(5)} \cdot A^{(1)}, \quad A'^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -20 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & -23 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Wir addieren die mit -1 multiplizierte zweite Zeile zur ersten Zeile, die mit -2 multiplizierte zweite Zeile zur dritten Zeile, die mit 2 multiplizierte zweite Zeile zur vierten Zeile und die mit 5 multiplizierte zweite Zeile zur fünften Zeile:

$$A^{(2)} = t_{52}^{(5)}(5) \cdot t_{42}^{(5)}(2) \cdot t_{32}^{(5)}(-2) \cdot t_{12}^{(5)}(-1) \cdot A'^{(1)}, \quad A^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{Vmatrix}.$$

In dieser Matrix vertauschen wir die dritte und sechste Spalte, was einer Multiplikation mit $s_{36}^{(6)}$ von rechts entspricht:

$$A'^{(2)} = A^{(2)} \cdot s_{36}^{(6)}, \quad A'^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Wir addieren die mit -2 multiplizierte dritte Zeile zur vierten Zeile und die mit -1 multiplizierte dritte Zeile zur fünften Zeile. Dann gilt

$$A^{(3)} = t_{53}^{(5)}(-1) \cdot t_{43}^{(5)}(-2) \cdot A'^{(2)}, \quad A^{(3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Schließlich vertauschen wir die vierte und fünfte Spalte und addieren die mit 3 multiplizierte vierte Zeile zur ersten Zeile, die mit 3/2 multiplizierte vierte Zeile zur zweiten Zeile, die mit -3 multiplizierte vierte Zeile zur dritten Zeile, die mit -1 multiplizierte vierte Zeile zur fünften Zeile und erhalten:

$$A^{(4)} = t_{54}^{(5)}(-1) \cdot t_{34}^{(5)}(-3) \cdot t_{24}^{(5)}(3/2) \cdot t_{14}^{(5)}(3) \cdot (A^{(3)} \cdot s_{45}^{(6)}), \quad A^{(4)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Damit bricht unser Verfahren ab, und wir können feststellen:

Der Rang der gegebenen Matrix ist gleich 4.

Addieren wir noch die mit -1 multiplizierte zweite Spalte zur fünften Spalte und die mit -2 multiplizierte zweite Spalte zur sechsten Spalte, so erhalten wir eine Diagonalmatrix:

$$D^{(4)} = A^{(4)} \cdot t_{25}^{(6)}(-1) \cdot t_{26}^{(6)}(-2), \quad D^{(4)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

*Es gilt

$$D^{(4)} = C' \cdot A \cdot C,$$

und es ist

$$C = s_{36}^{(6)} \cdot s_{45}^{(6)} \cdot t_{25}^{(6)}(-1) \cdot t_{26}^{(6)}(-2),$$

$$C' = t_{54}^{(5)}(-1) \cdot t_{34}^{(5)}(-3) \cdot t_{24}^{(5)}(3/2) \cdot t_{14}^{(5)}(3) \cdot t_{53}^{(5)}(-1) \cdot t_{43}^{(5)}(-2) \cdot t_{52}^{(5)}(5) \cdot t_{42}^{(5)}(2) \cdot t_{32}^{(5)}(-2)$$
$$\times\, t_{12}^{(5)}(-1) \cdot s_{32}^{(5)} \cdot t_{51}^{(5)}(-3) \cdot t_{41}^{(5)}(-2) \cdot s_{31}^{(5)}.*$$

8. AUFGABEN

1. Es sei $V = \Omega$ der zweidimensionale Vektorraum der komplexen Zahlen. Ist $x \in V$ und $a = \alpha + i\beta$ eine komplexe Zahl, so ist durch die Gleichung $A_a x = a \cdot x$ eine lineare Abbildung von V in sich erklärt. Man berechne die dem Operator A_a zugeordnete zweireihige quadratische Matrix, wenn $\mathfrak{B} = \{1, i\}$ als Basis in V gewählt wird.

2. Ist $V = R^n$, so sind durch die Gleichungen $A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ und $B(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ lineare Abbildungen von R^n in R^{n-1} definiert. Man bestimme die Matrizen dieser Abbildungen in bezug auf die kanonische Basis $\mathfrak{B}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von R^n und $\mathfrak{B}_{n-1} = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ von R^{n-1}.

3. Man bestimme die Matrizen

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} e_{i,\,i+1} \quad \text{und} \quad g_1 = \sum_{i=1}^{n} e_{i+1,\,i},$$

wobei $e_{i'i} \in \mathscr{A}_{n,n}$ $(i', i = 1, 2, \dots, n)$ die in Nr. 3 angegebene Basis des linearen Vektorraumes $\mathscr{A}_{n,n}$ ist. Man berechne die Produkte

$$f_m = f_1^m = \underbrace{f_1 \cdots f_1}_{m}, \quad g_m = g_1^m = \underbrace{g_1 \cdots g_1}_{m} \quad \text{und} \quad A \cdot f_m,\ f_m \cdot B,\ A \cdot g_m,\ g_m \cdot B$$

für eine beliebige Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ bzw. $B = \|\beta_{ii''}\|_{n,n''}$.

4. Eine Matrix vom Typ (n', n) ist dann und nur dann regulär, wenn ihr Rang $r = n \leqq n'$ ist.

5. Eine zweireihige quadratische Matrix ist genau dann regulär, wenn $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \neq 0$ ist.

6. Man beweise durch vollständige Induktion: Ein Produkt von m regulären n-reihigen quadratischen Matrizen ist eine reguläre n-reihige quadratische Matrix.

7. Ist V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V, so sind die Vektoren

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{n1}x_n, \\ y_2 &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{n2}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= \alpha_{1m}x_1 + \alpha_{2m}x_2 + \cdots + \alpha_{nm}x_n \end{aligned}$$

dann und nur dann linear unabhängig, wenn $r(\|\alpha_{ij}\|_{n,m}) = m$ ist.

8.* Man berechne die Matrizen C und C' aus dem Beispiel 9⁰.

9. Man bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

10. Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ eine gegebene Matrix, so ist die durch

$$A(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\cdot\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n'i}\cdot\xi_i\right)$$

definierte Abbildung A eine lineare Abbildung von R^n in $R^{n'}$.

§ 10. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

1. EINLEITUNG

In den beiden vorhergehenden Paragraphen haben wir die linearen Abbildungen eines linearen Vektorraumes V in einen anderen untersucht und dabei die Bilder von Vektoren aus V im Bildraum V' beschrieben. In diesem Paragraphen behandeln wir die umgekehrte Fragestellung. Von einem Vektor des Bildraumes ausgehend, fragen wir nach Möglichkeiten zur Beschreibung derjenigen Vektoren des Urbildraumes, die durch eine gegebene lineare Abbildung auf den gegebenen Vektor abgebildet werden. Dieses Problem führt im Fall endlichdimensionaler Vektorräume auf die Frage nach den Lösungen linearer Gleichungssysteme. Die Lösungstheorie der linearen Gleichungssysteme ist für alle Zweige der Mathematik und ihrer Anwendungen von großer Bedeutung.

Auf der Grundlage der in den §§ 8 und 9 gewonnenen Kenntnisse über die linearen Abbildungen wird die Frage nach den Lösungen linearer Gleichungssysteme erschöpfend behandelt. Im letzten Abschnitt erläutern wir den nach Gauss benannten und aus der Sicht der modernen Rechentechnik besonders zweckmäßigen Algorithmus zur Berechnung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems.

2. LINEARE VEKTORGLEICHUNGEN UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Es sei $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine gegebene lineare Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum V' und $x'_0 \in V'$ ein fester Vektor. *Unter der linearen Vektorgleichung*

$$Ax \doteq x'_0 \tag{1}$$

verstehen wir die Frage nach denjenigen Vektoren $x \in V$, die durch die Abbildung A auf den Vektor $x'_0 \in V'$ abgebildet werden. Diese Vektoren nennen wir *Lösungen der linearen Vektorgleichung* (1).

Der Punkt über dem Gleichheitszeichen soll uns dabei daran erinnern, daß es sich hier nicht um eine Gleichung im üblichen Sinne, sondern um eine Frage nach Vektoren $x \in V$ handelt, für die (1) eine Gleichung wird.

Sind V und V' endlichdimensionale Vektorräume der Dimensionen n bzw. n', so können wir die lineare Vektorgleichung (1) folgendermaßen umformen: Es sei $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}\}$ eine Basis von V'. Bezeichnet x einen Vektor aus V, der der Gleichung (1) genügt, also eine Lösung der Gleichung (1) ist:

$$Ax = x'_0, \tag{1'}$$

so betrachten wir seine Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren von V:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n.$$

Dann ist

$$Ax = \xi_1 Ax_1 + \xi_2 Ax_2 + \cdots + \xi_n Ax_n.$$

Die Bilder $Ax_1, \ldots, Ax_n$ der Vektoren aus $\mathfrak{B}$ können wir in der Form

$$Ax_i = \alpha_{1i}x'_1 + \alpha_{2i}x'_2 + \cdots + \alpha_{n'i}x'_{n'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

durch die Basisvektoren von V' ausdrücken und erhalten bei Verwendung des Summenzeichens die Gleichung

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i} x'_{i'}.$$

Durch Anwendung des verallgemeinerten distributiven Gesetzes ergibt sich

$$Ax = \sum_{i'=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \right) x'_{i'}.$$

Diese Gleichung hat folgende Bedeutung: *Sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten des Lösungsvektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ und ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ die der linearen Ab-*

bildung A bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ zugeordnete Matrix, so sind

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} \cdot \xi_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} \cdot \xi_i, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n'i} \cdot \xi_i$$

die Koordinaten des Vektors Ax in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$.

Bezeichnen wir die Koordinaten des Vektors x'_0 in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$ mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'}$, so folgen aus der Gleichung (1′) und der Tatsache, daß die Koordinaten eines Vektors in bezug auf eine feste Basis eindeutig bestimmt sind, die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i = \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n'). \tag{2'}$$

Unter einem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot \xi_1 + \alpha_{12} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot \xi_n \doteq \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot \xi_1 + \alpha_{22} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot \xi_n \doteq \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n'1} \cdot \xi_1 + \alpha_{n'2} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{n'n} \cdot \xi_n \doteq \beta_{n'} \end{array}\right\} \tag{2}$$

verstehen wir die Frage nach allen n-tupeln $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ von reellen Zahlen, für die

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i = \beta_{i'} \quad (i' = 1, \ldots, n') \tag{2'}$$

ist. Diese n-tupel heißen *Lösungen des linearen Gleichungssystems* (2). Wir haben festgestellt, daß *jeder Lösung $x \in V$ der linearen Vektorgleichung* (1) *eine Lösung $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ des linearen Gleichungssystems* (2) *entspricht. Dabei sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten des Lösungsvektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$; $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n} = \|A\|$ ist die der linearen Abbildung A bezüglich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ entsprechende Matrix, und $\beta_1, \ldots, \beta_{n'}$ sind die Koordinaten des Vektors x_0 bezüglich $\mathfrak{B}'$.*

Man überzeugt sich unschwer, daß die obigen Überlegungen umkehrbar sind: *Ist $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems* (2), *so ist*

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n \in V$$

eine Lösung der linearen Vektorgleichung (1). *Dabei ist A gleich der durch die Matrix A bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ von V und $\mathfrak{B}'$ von V' definierten linearen Abbildung und $x'_0 = \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \cdots + \beta_{n'} x'_{n'} \in V'$ zu setzen.*

Die Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ heißt die *Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems* (2), das n'-tupel $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'})$ seine *rechte Seite.*

Ist $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems (2) und bezeichnet $\hat{x}$ die zugeordnete Spaltenmatrix

$$\hat{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Vmatrix} \text{ und } \hat{b}' \text{ die Spaltenmatrix } \hat{b}' = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n'} \end{Vmatrix},$$

so lassen sich die n' Gleichungen (2') in einer einzigen Matrizengleichung zusammenfassen.

$$A \cdot \hat{x} = \hat{b}'. \tag{3'}$$

Das lineare Gleichungssystem (2) läßt sich als *lineare Matrizengleichung*

$$A \cdot \hat{x} \doteq \hat{b}' \tag{3}$$

schreiben. In manchen Fällen erweist sich die Matrizenschreibweise für das lineare Gleichungssystem (2) als besonders zweckmäßig.[1])

Wir haben zwei äquivalente Formulierungen für das in der Einleitung genannte Gleichungsproblem gewonnen:

1. die Frage nach allen Vektoren $\boldsymbol{x} \in V$, für die

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0' \tag{1'}$$

ist;

2. die Frage nach allen n-tupeln $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, für die

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i = \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2'}$$

ist.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns der beiden angegebenen Formulierungen bedienen.

Die Frage nach den Lösungen einer linearen Vektorgleichung oder eines linearen Gleichungssystems unterteilen wir in drei Teilfragen, die in den folgenden drei Abschnitten getrennt behandelt werden:

1. Die Frage nach der Existenz von Lösungen.
2. Die Frage nach einer Übersicht über alle Lösungen.
3. Die Frage nach einem Verfahren zur Berechnung von Lösungen.

3. DIE EXISTENZ VON LÖSUNGEN

Die Frage nach der Existenz von Lösungen läßt sich für die lineare Vektorgleichung (1) auf Grund der Ausführungen von § 8 sofort beantworten.

I. *Die lineare Vektorgleichung $A\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{x}_0'$ ist dann und nur dann lösbar, wenn $\boldsymbol{x}_0' \in AV$ ist.*

---

[1]) Vgl. hierzu auch die Bemerkung auf S. 124.

Um hieraus Lösbarkeitskriterien für das lineare Gleichungssystem (2) zu gewinnen, müssen wir die Aussage $x'_0 \in AV$ näher untersuchen.

Nach § 8, Nr. 5 bilden die Vektoren $y'_1 = Ax_1, \ldots, y'_n = Ax_n$ ein Erzeugendensystem für den Vektorraum AV. Der Vektor x'_0 ist also dann und nur dann aus AV, wenn er von den Vektoren $y'_1, \ldots, y'_n$ linear abhängig ist: $x'_0 \in L(\{y'_1, y'_2, \ldots, y'_n\})$. Betrachten wir die reguläre Abbildung $\Phi' = \hat{\Phi}_{n'}^{-1} \Phi_{\mathfrak{B}'}$ von V' auf $\mathscr{A}_{n'}$, die jedem Vektor aus V' die Spaltenmatrix seiner Koordinaten zuordnet, so gilt

$$\Phi'(y'_i) = \begin{Vmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{n'i} \end{Vmatrix} = \hat{a}'_i, \quad \Phi'(x'_0) = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n'} \end{Vmatrix} = \hat{b}' \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Vektor x'_0 ist dann und nur dann von den Vektoren $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ linear abhängig, wenn die Spaltenmatrix $\hat{b}'$ von den Spaltenmatrizen $\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n$ linear abhängt:

$$\hat{b}' \in L(\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n\}). \tag{4}$$

Berücksichtigen wir, daß die Spaltenmatrizen $\hat{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Spalten der Koeffizientenmatrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ des linearen Gleichungssystems (2) sind, während $\hat{b}'$ die von der rechten Seite dieses Gleichungssystems gebildete Spalte bezeichnet, so erhalten wir aus dem Satz I:

II. *Das lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn die von der rechten Seite gebildete Spalte $\hat{b}'$ von den Spalten $\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n$ der Koeffizientenmatrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ linear abhängig ist.

Diese lineare Abhängigkeit können wir auch in der Form

$$\dim L(\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n, \hat{b}'\}) = \dim L(\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n\})$$

ausdrücken. Bezeichnen wir mit $\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n',n+1}$ diejenige Matrix, die wir erhalten, wenn wir die Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ um die Spalte $\hat{b}'$ ergänzen,

$$\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n',n+1} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \ldots & \alpha_{n'n} & \beta_{n'} \end{Vmatrix},$$

so ist nach Definition des Ranges einer Matrix

$$\dim L(\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n, \hat{b}'\}) = r(\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n',n+1})$$

$$\dim L(\{\hat{a}'_1, \hat{a}'_2, \ldots, \hat{a}'_n\}) = r(A),$$

und wir erhalten den Satz von KRONECKER-CAPELLI

III. *Das lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$r(\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n', n+1}) = r(A) \tag{5}$$

ist.

Häufig nennt man die Matrix $\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n', n+1}$ die *große Koeffizientenmatrix* des linearen Gleichungssystems (2), während die Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n', n}$ dann zum Unterschied als *kleine Koeffizientenmatrix* bezeichnet wird.

III'. *Das lineare Gleichungssystem* (2) *ist genau dann lösbar, wenn der Rang der großen Koeffizientenmatrix mit dem Rang der kleinen Koeffizientenmatrix übereinstimmt.*

Durch das in § 9, Nr. 7 angegebene Verfahren zur Bestimmung des Ranges einer Matrix sind wir in der Lage, das im Satz III formulierte Kriterium für jedes gegebene lineare Gleichungssystem nachzuprüfen.

Zum Abschluß der Untersuchungen zur Frage 1 betrachten wir noch einige Spezialfälle.

Man spricht von einer *homogenen linearen Vektorgleichung* bzw. von einem *homogenen linearen Gleichungssystem,* wenn $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}'$ ist bzw. alle $\beta_{i'} = 0$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$ sind:

$$A\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{o}', \tag{1^0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, 2, \ldots, n'). \tag{2^0}$$

Andernfalls nennt man die lineare Vektorgleichung (1) bzw. das lineare Gleichungssystem (2) *inhomogen.* Aus den bisher bewiesenen Sätzen I, II und III folgt:

IV. *Eine homogene lineare Vektorgleichung*

$$A\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{o}' \tag{1^0}$$

bzw. ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2^0}$$

ist stets lösbar.

Die Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ der homogenen linearen Vektorgleichung (1^0) bzw. die Lösung $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$ des homogenen linearen Gleichungssystems (2^0) nennt man die *triviale Lösung.*

Als weitere unmittelbare Folgerung aus den Sätzen I, II, III erhalten wir:

V. *Ist A eine lineare Abbildung von V auf V', so ist die Gleichung*

$$Ax \doteq x'_0 \tag{1}$$

für jedes $x'_0 \in V'$ lösbar.

Ist $n' \leqq n$ und $r(A) = n'$, so ist das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

für jede rechte Seite lösbar.

4. DIE STRUKTUR DER LÖSUNGSMENGE

Als nächstes beantworten wir die Frage nach einer Übersicht über alle Lösungen einer linearen Vektorgleichung (1) bzw. eines linearen Gleichungssystems (2). Aus § 8, Nr. 2, Satz III erhalten wir:

VI. *Ist die lineare Vektorgleichung*

$$Ax \doteq x'_0 \tag{1}$$

lösbar, so bilden ihre Lösungen eine lineare Mannigfaltigkeit M_{x_0} im Vektorraum V. Bezeichnet x_0 eine Lösung, so ist $M_{x_0} = x_0 + A^{-1}\{o'\}$.

Für die Differenz zweier Lösungen x_0 und x_1 gilt also $A(x_0 - x_1) = o'$. Die homogene lineare Vektorgleichung

$$Ax \doteq o' \tag{1^0}$$

heißt die *zu* (1) *gehörende homogene lineare Vektorgleichung*, wenn A in beiden Fällen die gleiche lineare Abbildung von V in V' bezeichnet.

Als Folgerung aus Satz VI ergibt sich:

VII. *Zwei Lösungen der inhomogenen linearen Vektorgleichung* (1) *unterscheiden sich um eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Vektorgleichung.*

Ferner erhalten wir den Satz:

VIII. *Die Lösungen einer homogenen linearen Vektorgleichung*

$$Ax \doteq o' \tag{1^0}$$

bilden einen linearen Teilraum $W = A^{-1}\{o'\}$ von V.

Die homogene lineare Vektorgleichung (1⁰) *besitzt dann und nur dann eine nichttriviale Lösung $x \neq o$, wenn die lineare Abbildung A nicht regulär ist.*

Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, so ist die Dimension des Lösungsraumes W der homogenen linearen Vektorgleichung (1⁰) *gleich* $d = n - r$. *Die Lösungen der inhomogenen linearen Vektorgleichung* (1) *bilden eine* $d = (n - r)$*-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit.*

1^0.* Die gewonnenen Ergebnisse besitzen eine wichtige Anwendung in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Wir erinnern den Leser an die auf dem linearen Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ erklärten linearen Abbildungen D^ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) (vgl. § 8, Nr. 4, 17^0). Sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegebene reelle Zahlen, so ist

$$A = \alpha_0 D^n + \alpha_1 D^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} D^1 + \alpha_n D^0$$

eine lineare Abbildung von $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ in $D_0(\alpha_0, \beta_0)$. Ist $g(t) \in D_0(\alpha_0, \beta_0)$ eine gegebene Funktion, so bedeutet die lineare Vektorgleichung

$$Af(t) \doteq g(t)$$

die Frage nach denjenigen n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f(t)$ auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$, für die

$$\alpha_0 \frac{d^n}{dt^n} f(t) + \alpha_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{d}{dt} f(t) + \alpha_n f(t) = g(t)$$

ist. Man spricht in diesem Fall von einer *linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* Aus den Sätzen VI–VIII folgt:

Die Lösungen einer linearen Differentialgleichung bilden eine lineare Mannigfaltigkeit.

Zwei Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung unterscheiden sich um eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung.

Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung bilden einen linearen Vektorraum.

Als Anwendung unserer allgemeinen Überlegungen haben wir einen Überblick über die Gesamtheit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung gewonnen.*

Die Sätze VI – VIII lassen sich unmittelbar auf ein lineares Gleichungssystem (2) übertragen. Dazu betrachten wir die durch die linke Seite des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

definierte lineare Abbildung A von R^n in $R^{n'}$:

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} \cdot \xi_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} \cdot \xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n'i} \cdot \xi_i\right).$$

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems (2) sind offenbar diejenigen n-tupel $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, für die

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'})$$

gilt; diese n-tupel bilden das vollständige Urbild $A^{-1}\{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n'})\}$.

IX. *Ist das lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

lösbar, so bilden seine Lösungen eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $d = n - r$ $(r = r(\|\alpha_{i'i}\|_{n',n}))$ *im* R^n.

Zwei Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems (2) *unterscheiden sich um eine Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Dieses entsteht aus dem gegebenen linearen Gleichungssystem, wenn man alle* $\beta_{i'} = 0$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$ *setzt.*

X. *Die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2^0}$$

bilden einen linearen Teilraum der Dimension $d = n - r$ *des* R^n. *Das homogene lineare Gleichungssystem* (2^0) *besitzt dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn der Rang r der Koeffizientenmatrix kleiner als n ist.*

Als Folgerung aus den Sätzen VII–X erhalten wir ein Kriterium, wann eine inhomogene lineare Vektorgleichung (1) bzw. ein inhomogenes lineares Gleichungssystem (2) nur eine einzige Lösung besitzt:

XI. *Die inhomogene lineare Vektorgleichung*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{x}'_0 \tag{1}$$

bzw. das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2}$$

besitzt genau dann eine einzige Lösung, wenn die lineare Vektorgleichung (1) *bzw. das lineare Gleichungssystem* (2) *lösbar ist und die zugehörige homogene Vektorgleichung*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \doteq \boldsymbol{o}' \tag{1^0}$$

bzw. das zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2^0}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Zum Abschluß dieser Überlegungen machen wir darauf aufmerksam, daß wir durch die Sätze VII–X die Möglichkeit erhalten haben, lineare Teilräume sowie lineare Mannigfaltigkeiten in einem linearen Vektorraum als Lösungen von linearen Vektorgleichungen oder linearen Gleichungssystemen zu beschreiben.[1])

---

[1]) Vgl. hierzu § 2, Nr. 4, 5^0.

2°. Erinnern wir uns der in § 3, Nr. 3 angegebenen Zusammenhänge zwischen den linearen Mannigfaltigkeiten des R^3 und den Punkten, Geraden und Ebenen im Raum, so ist unschwer einzusehen, daß die Beschreibung linearer Mannigfaltigkeiten durch lineare Gleichungssysteme eine der Grundlagen der analytischen Geometrie des Raumes, d. h. der analytischen oder besser algebraischen Beschreibung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen im Raum ist.

*Wir weisen darauf hin, daß aus den Überlegungen von § 8, Nr. 6 folgt, daß *jeder* Teilraum eines linearen Vektorraumes durch homogene Gleichungen beschrieben werden kann. Dann läßt sich aber auch *jede* lineare Mannigfaltigkeit in einem linearen Vektorraum als Lösungsmannigfaltigkeit inhomogener linearer Gleichungen beschreiben.[1])*

5. DER GAUSSSCHE ALGORITHMUS ZUR BERECHNUNG VON LÖSUNGEN

Es bleibt die Frage nach der Berechnung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems (2) zu beantworten. Das im folgenden geschilderte Verfahren zur Berechnung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems (2) ist dem in § 9, Nr. 7 angegebenen Verfahren zur Bestimmung des Ranges einer Matrix analog. Beide Verfahren werden häufig *Gaußscher Algorithmus* genannt. Es sei zunächst $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems (2). Wir schreiben die linearen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i = \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n') \tag{2'}$$

in der ausführlichen Form

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot \xi_1 + \alpha_{12} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot \xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot \xi_1 + \alpha_{22} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{2n} \cdot \xi_n = \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n'1} \cdot \xi_1 + \alpha_{n'2} \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_{n'n} \cdot \xi_n = \beta_{n'}. \end{array}\right\} \tag{2'}$$

Unter den Koeffizienten $\alpha_{i'i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, 2, \ldots, n')$ wählen wir einen von Null verschiedenen: $\alpha_{i_0' i_0} \neq 0$. Dann vertauschen wir ξ_{i_0} mit ξ_1 sowie die erste und i_0'-te Gleichung. Wir erhalten

$$\begin{array}{l} \alpha'_{11} \cdot \xi'_1 + \alpha'_{12} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha'_{1n} \cdot \xi'_n = \beta'_1, \\ \alpha'_{21} \cdot \xi'_1 + \alpha'_{22} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha'_{2n} \cdot \xi'_n = \beta'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha'_{n'1} \cdot \xi'_1 + \alpha'_{n'2} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha'_{n'n} \cdot \xi'_n = \beta'_{n'}, \end{array}$$

und es ist

$$\begin{array}{ll} \xi'_1 = \xi_{i_0}, \quad \xi'_{i_0} = \xi_1; \quad \xi'_i = \xi_i & \text{für} \quad i \neq 1, i_0; \\ \beta'_1 = \beta_{i_0'}, \quad \beta'_{i_0'} = \beta_1; \quad \beta'_{i'} = \beta_{i'} & \text{für} \quad i' \neq 1, i_0'. \end{array}$$

---

[1]) Vgl. hierzu auch § 12, Nr. 3, Sätze VI und VI'.

Zwischen den Koeffizienten $\alpha'_{i'i}$ und $\alpha_{i'i}$ bestehen die in § 9, Nr. 7 angegebenen Gleichungen (14). Insbesondere ist $\alpha'_{11} \neq 0$. Für $i' = 2, 3, \ldots, n'$ addieren wir nun sukzessive die mit $\gamma_{i'}^{(1)} = -\dfrac{\alpha'_{i'1}}{\alpha'_{11}}$ multiplizierte erste Gleichung zur i'-ten Gleichung und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)} \cdot \xi'_1 + \alpha_{12}^{(1)} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha_{1n}^{(1)} \cdot \xi'_n &= \beta_1^{(1)}, \\ \alpha_{22}^{(1)} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha_{2n}^{(1)} \cdot \xi'_n &= \beta_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{n'2}^{(1)} \cdot \xi'_2 + \cdots + \alpha_{n'n}^{(1)} \cdot \xi'_n &= \beta_{n'}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2^{(1)})$$

Die Beziehungen zwischen den Koeffizienten $\alpha_{i'i}^{(1)}$ und $\alpha'_{i'i}$ werden durch die Gleichungen (15) von § 9, Nr. 7 gegeben, und für die rechte Seite erhalten wir

$$\beta_1^{(1)} = \beta'_1; \quad \beta_{i'}^{(1)} = \beta'_{i'} + \gamma_{i'}^{(1)} \cdot \beta'_1 \quad (i' = 2, 3, \ldots, n').$$

Gibt es unter den Koeffizienten $\alpha_{i'i}^{(1)}$ $(i = 2, \ldots, n;\ i' = 2, \ldots, n')$ einen von Null verschiedenen, $\alpha_{i'_1 i_1}^{(1)} \neq 0$, so vertauschen wir ξ'_{i_1} mit ξ'_2 sowie die zweite und i'_1-te der Gleichungen $(2^{(1)})$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}^{\prime(1)} \cdot \xi''_1 + \alpha_{12}^{\prime(1)} \cdot \xi''_2 + \alpha_{13}^{\prime(1)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{1n}^{\prime(1)} \cdot \xi''_n &= \beta_1^{\prime(1)}, \\ \alpha_{22}^{\prime(1)} \cdot \xi''_2 + \alpha_{23}^{\prime(1)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{2n}^{\prime(1)} \cdot \xi''_n &= \beta_2^{\prime(1)}, \\ \alpha_{32}^{\prime(1)} \cdot \xi''_2 + \alpha_{33}^{\prime(1)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{3n}^{\prime(1)} \cdot \xi''_n &= \beta_3^{\prime(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{n'2}^{\prime(1)} \cdot \xi''_2 + \alpha_{n'3}^{\prime(1)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{n'n}^{\prime(1)} \cdot \xi''_n &= \beta_{n'}^{\prime(1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2'^{(1)})$$

Es ist

$$\xi''_2 = \xi'_{i_1}, \quad \xi''_{i_1} = \xi'_2; \quad \xi''_i = \xi'_i \qquad \text{für} \quad i \neq 2, i_1;$$

$$\beta_2^{\prime(1)} = \beta_{i'_1}^{(1)}, \quad \beta_{i'_1}^{\prime(1)} = \beta_2^{(1)}; \quad \beta_{i'}^{\prime(1)} = \beta_{i'}^{(1)} \quad \text{für} \quad i' \neq 2, i'_1.$$

Für die Koeffizienten $\alpha_{i'i}^{\prime(1)}$ und $\alpha_{i'i}^{(1)}$ gelten die Gleichungen (16) von § 9, Nr. 7. Es ist $\alpha_{22}^{\prime(1)} \neq 0$, und von den Gleichungen $(2'^{(1)})$ addieren wir für $i' = 1, 3, \ldots, n'$ sukzessive die mit $\gamma_{i'}^{(2)} = -\dfrac{\alpha_{i'2}^{\prime(1)}}{\alpha_{22}^{\prime(1)}}$ multiplizierte zweite Gleichung zur i'-ten Gleichung und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}^{(2)} \cdot \xi''_1 \qquad + \alpha_{13}^{(2)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{1n}^{(2)} \cdot \xi''_n &= \beta_1^{(2)}, \\ \alpha_{22}^{(2)} \cdot \xi''_2 + \alpha_{23}^{(2)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{2n}^{(2)} \cdot \xi''_n &= \beta_2^{(2)}, \\ \alpha_{33}^{(2)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{3n}^{(2)} \cdot \xi''_n &= \beta_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{n'3}^{(2)} \cdot \xi''_3 + \cdots + \alpha_{n'n}^{(2)} \cdot \xi''_n &= \beta_{n'}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2^{(2)})$$

Die Beziehungen zwischen den Koeffizienten $\alpha_{i'i}^{(2)}$ und $\alpha_{i'i}^{(1)}$ werden durch die Gleichungen (17) von § 9, Nr. 7 beschrieben, und für die rechte Seite gilt

$$\beta_2^{(2)} = \beta_2'^{(1)}; \quad \beta_{i'}^{(2)} = \beta_{i'}'^{(1)} + \gamma_{i'}^{(2)} \cdot \beta_2'^{(1)} \quad (i' = 1, 3, \ldots, n').$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt schließlich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}^{(r)} \cdot \xi_1^{(r)} \qquad\qquad + \alpha_{1,r+1}^{(r)} \cdot \xi_{r+1}^{(r)} + \cdots + \alpha_{1n}^{(r)} \cdot \xi_n^{(r)} = \beta_1^{(r)}, \\ \qquad \alpha_{22}^{(r)} \cdot \xi_2^{(r)} \qquad + \alpha_{2,r+1}^{(r)} \cdot \xi_{r+1}^{(r)} + \cdots + \alpha_{2n}^{(r)} \cdot \xi_n^{(r)} = \beta_2^{(r)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \alpha_{rr}^{(r)} \cdot \xi_r^{(r)} + \alpha_{r,r+1}^{(r)} \cdot \xi_{r+1}^{(r)} + \cdots + \alpha_{rn}^{(r)} \cdot \xi_n^{(r)} = \beta_r^{(r)}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot (\xi_{r+1}^{(r)} + \cdots + \xi_n^{(r)}) \qquad = \beta_{r+1}^{(r)}, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot (\xi_{r+1}^{(r)} + \cdots + \xi_n^{(r)}) \qquad = \beta_{n'}^{(r)}. \end{array}\right\} \quad (2^{(r)})$$

Dabei ist $\alpha_{11}^{(r)} \neq 0$, $\alpha_{22}^{(r)} \neq 0, \ldots, \alpha_{rr}^{(r)} \neq 0$, und es muß $\beta_{r+1}^{(r)} = \beta_{r+2}^{(r)} = \cdots = \beta_{n'}^{(r)} = 0$ sein.

Dies ist die oben abgeleitete Bedingung (Satz III)

$$r(\|\alpha_{i'i}, \beta_{i'}\|_{n',n+1}) = r(\|\alpha_{i'i}^{(r)}, \beta_{i'}^{(r)}\|_{n',n+1}) = r(\|\alpha_{i'i}^{(r)}\|_{n',n}) = r(A)$$

für die Lösbarkeit des betrachteten linearen Gleichungssystems. Wir setzen

$$\xi_{r+1}^{(r)} = \tau_1, \; \xi_{r+2}^{(r)} = \tau_2, \; \ldots, \; \xi_n^{(r)} = \tau_d$$

mit $d = n - r$ und erhalten aus $(2^{(r)})$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}^{(r)} \cdot \xi_1^{(r)} = \beta_1^{(r)} - \alpha_{1,r+1}^{(r)} \cdot \tau_1 - \cdots - \alpha_{1n}^{(r)} \cdot \tau_d, \\ \alpha_{22}^{(r)} \cdot \xi_2^{(r)} = \beta_2^{(r)} - \alpha_{2,r+1}^{(r)} \cdot \tau_1 - \cdots - \alpha_{2n}^{(r)} \cdot \tau_d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{rr}^{(r)} \cdot \xi_r^{(r)} = \beta_r^{(r)} - \alpha_{r,r+1}^{(r)} \cdot \tau_1 - \cdots - \alpha_{rn}^{(r)} \cdot \tau_d. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Dividieren wir die i'-te Gleichung durch $\alpha_{i'i}^{(r)}$ $(i' = 1, 2, \ldots, r)$, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1^{(r)} = \gamma_1 + \gamma_{11} \cdot \tau_1 + \cdots + \gamma_{1d} \cdot \tau_d, \\ \xi_2^{(r)} = \gamma_2 + \gamma_{21} \cdot \tau_1 + \cdots + \gamma_{2d} \cdot \tau_d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_r^{(r)} = \gamma_r + \gamma_{r1} \cdot \tau_1 + \cdots + \gamma_{rd} \cdot \tau_d. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Dabei ist

$$\gamma_{j'} = \frac{\beta_{j'}^{(r)}}{\alpha_{j'j'}^{(r)}}; \quad \gamma_{j'j} = -\frac{\alpha_{j',r+j}^{(r)}}{\alpha_{j'j'}^{(r)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, d; \; j' = 1, 2, \ldots, r).$$

Wir ergänzen die Gleichungen (7) durch $\xi_{r+j}^{(r)} = \tau_j$ $(j = 1, 2, \ldots, d)$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^{(r)} &= \gamma_1 + \gamma_{11}\cdot\tau_1 + \cdots + \gamma_{1d}\cdot\tau_d, \\ \xi_2^{(r)} &= \gamma_2 + \gamma_{21}\cdot\tau_1 + \cdots + \gamma_{2d}\cdot\tau_d, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_r^{(r)} &= \gamma_r + \gamma_{r1}\cdot\tau_1 + \cdots + \gamma_{rd}\cdot\tau_d, \\ \xi_{r+1}^{(r)} &= \tau_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n^{(r)} &= \tau_d. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ist $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems (2), so gelten die Gleichungen (8) für die Zahlen $\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}$. Wählen wir umgekehrt für $\tau_1, \ldots, \tau_d$ beliebige reelle Zahlen und berechnen die Zahlen $\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}$ aus den Gleichungen (8), so können wir alle durchgeführten Überlegungen umkehren und erhalten aus dem n-tupel $(\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)})$ ein n-tupel $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, das eine Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems (2) ist.

Wir weisen den Leser besonders darauf hin, daß sich die $\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}$ durch sukzessive Vertauschung aus den $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ergeben haben. Die Lösung $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ des linearen Gleichungssystems (2) erhält man also aus $(\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)})$ durch eine Permutation der Zahlen $\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}$. Die durch das Gleichungssystem nicht bestimmten $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ nennt man die *Parameter der Lösungen* des linearen Gleichungssystems (2). Ihre Anzahl $d = n - r$ ist gleich der Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit im R^n.

3⁰. Als Beispiel berechnen wir die Lösungen $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6)$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 &= 0, \\ 2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 + 2\cdot\xi_4 + \xi_6 &= 1, \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 9\cdot\xi_5 &= 1, \\ 2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= 0, \\ 3\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_4 + 4\cdot\xi_5 + \xi_6 &= 0. \end{aligned}$$

Wir vertauschen die erste und dritte Gleichung:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 9\cdot\xi_5 &= 1, \\ 2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 + 2\cdot\xi_4 + \xi_6 &= 1, \\ \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 &= 0, \\ 2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= 0, \\ 3\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_4 + 4\cdot\xi_5 + \xi_6 &= 0. \end{aligned}$$

Die mit -2 bzw. -3 multiplizierte erste Gleichung addieren wir zur vierten bzw. fünften Gleichung:

$$\begin{aligned}
\xi_1 + \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 9\cdot\xi_5 \qquad &= 1,\\
2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 + 2\cdot\xi_4 \qquad + \xi_6 &= 1,\\
\xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 \qquad &= 0,\\
-2\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_4 - 20\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= -2,\\
-5\cdot\xi_2 - 10\cdot\xi_3 - 5\cdot\xi_4 - 23\cdot\xi_5 + \xi_6 &= -3.
\end{aligned}$$

Wir vertauschen die zweite und dritte Gleichung:

$$\begin{aligned}
\xi_1 + \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 9\cdot\xi_5 \qquad &= 1,\\
\xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 \qquad &= 0,\\
2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 + 2\cdot\xi_4 \qquad + \xi_6 &= 1,\\
-2\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_4 - 20\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= -2,\\
-5\cdot\xi_2 - 10\cdot\xi_3 - 5\cdot\xi_4 - 23\cdot\xi_5 + \xi_6 &= -3.
\end{aligned}$$

In diesem Gleichungssystem addieren wir die mit -1 multiplizierte zweite Gleichung zur ersten, die mit -2 multiplizierte zweite Gleichung zur dritten, die mit 2 multiplizierte zweite Gleichung zur vierten und die mit 5 multiplizierte zweite Gleichung zur fünften:

$$\begin{aligned}
\xi_1 \qquad + 6\cdot\xi_5 \qquad &= 1,\\
\xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 \qquad &= 0,\\
-6\cdot\xi_5 + \xi_6 &= 1,\\
-14\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= -2,\\
-8\cdot\xi_5 + \xi_6 &= -3.
\end{aligned}$$

Wir setzen $\xi'_1 = \xi_1$, $\xi'_2 = \xi_2$, $\xi'_3 = \xi_6$, $\xi'_4 = \xi_4$, $\xi'_5 = \xi_5$ und $\xi'_6 = \xi_3$:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 \qquad + 6\cdot\xi'_5 \qquad &= 1,\\
\xi'_2 \qquad + \xi'_4 + 3\cdot\xi'_5 + 2\cdot\xi'_6 &= 0,\\
\xi'_3 \qquad - 6\cdot\xi'_5 \qquad &= 1,\\
2\cdot\xi'_3 \qquad - 14\cdot\xi'_5 \qquad &= -2,\\
\xi'_3 \qquad - 8\cdot\xi'_5 \qquad &= -3.
\end{aligned}$$

Addieren wir die mit -2 multiplizierte dritte Gleichung zur vierten, die mit -1 multiplizierte dritte Gleichung zur fünften, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\xi'_1 \qquad + 6\cdot\xi'_5 \qquad &= 1,\\
\xi'_2 \qquad + \xi'_4 + 3\cdot\xi'_5 + 2\cdot\xi'_6 &= 0,\\
\xi'_3 \qquad - 6\cdot\xi'_5 \qquad &= 1,\\
-2\cdot\xi'_5 \qquad &= -4,\\
-2\cdot\xi'_5 \qquad &= -4.
\end{aligned}$$

Wir setzen $\xi_1'' = \xi_1', \xi_2'' = \xi_2', \xi_3'' = \xi_3', \xi_4'' = \xi_5', \xi_5'' = \xi_4', \xi_6'' = \xi_6'$ und addieren die mit 3, 3/2, −3, −1 multiplizierte vierte Gleichung zur ersten, zweiten, dritten bzw. fünften Gleichung. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi_1'' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= -11,\\
\xi_2'' \qquad\qquad + \xi_5'' + 2\cdot\xi_6'' &= -6,\\
\xi_3'' \qquad\qquad\qquad &= 13,\\
-2\cdot\xi_4'' \qquad\qquad &= -4,\\
0 &= 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir $\xi_5'' = \tau_1, \xi_6'' = \tau_2$, so ergibt sich, wenn die vierte Gleichung durch −2 dividiert wird,

$$\begin{aligned}
\xi_1'' &= -11,\\
\xi_2'' &= -6 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2,\\
\xi_3'' &= 13,\\
\xi_4'' &= 2,\\
\xi_5'' &= \tau_1,\\
\xi_6'' &= \tau_2.
\end{aligned}$$

Es ist $\xi_1 = \xi_1' = \xi_1'', \xi_2 = \xi_2' = \xi_2'', \xi_3 = \xi_6' = \xi_6'', \xi_4 = \xi_4' = \xi_5'', \xi_5 = \xi_5' = \xi_4'', \xi_6 = \xi_3' = \xi_3''$, und wir erhalten die Lösungen $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$ des als Beispiel betrachteten linearen Gleichungssystems in der Form

$$(-11, -6 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2, \tau_2, \tau_1, 2, 13).$$

Dabei sind τ_1, τ_2 beliebig wählbare Parameter. Berücksichtigen wir die Darstellung

$$\begin{aligned}
&(-11, -6 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2, \tau_2, \tau_1, 2, 13)\\
&= (-11, -6, 0, 0, 2, 13) + \tau_1(0, -1, 0, 1, 0, 0) + \tau_2(0, -2, 1, 0, 0, 0),
\end{aligned}$$

so ist die zweidimensionale Lösungsmannigfaltigkeit des als Beispiel betrachteten linearen Gleichungssystems im R^6 gleich

$$(-11, -6, 0, 0, 2, 13) + L(\{(0, -1, 0, 1, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0, 0)\}).$$

Der lineare Teilraum

$$V_0 = L(\{(0, -1, 0, 1, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0, 0)\})$$

ist der Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

6. AUFGABEN

1. Man beweise folgendes Kriterium: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}\cdot\xi_1 + \alpha_{12}\cdot\xi_2 &\doteq \beta_1,\\
\alpha_{21}\cdot\xi_1 + \alpha_{22}\cdot\xi_2 &\doteq \beta_2
\end{aligned}$$

ist dann und nur dann für beliebige β_1, β_2 lösbar, wenn $\alpha_{11}\cdot\alpha_{22} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21} \neq 0$ ist. In diesem Fall ist die Lösungsmannigfaltigkeit nulldimensional, d. h., das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot \xi_1 \quad + \alpha_2 \cdot \xi_3 \quad &\doteq 1,\\
\alpha_1 \cdot \xi_2 \quad + \alpha_2 \cdot \xi_4 &\doteq 0,\\
\alpha_3 \cdot \xi_1 \quad + \alpha_4 \cdot \xi_3 \quad &\doteq 0,\\
\alpha_3 \cdot \xi_2 \quad + \alpha_4 \cdot \xi_4 &\doteq 1.
\end{aligned}$$

Man gebe ein Kriterium für die Lösbarkeit dieses linearen Gleichungssystems an. Im Fall der Lösbarkeit bestimme man die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit und berechne die Lösungen.

Ist $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ eine Lösung des obigen linearen Gleichungssystems, so berechne man das Matrizenprodukt

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{matrix}\right\|.$$

3.* Es seien

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \alpha_{i'} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{j'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{j'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, m';\ j' = 1, 2, \ldots, n')$$

zwei gegebene lineare Gleichungssysteme und M_1 bzw. M_2 ihre Lösungsmannigfaltigkeiten im Vektorraum R^n. Das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{k'i} \cdot \xi_i \doteq \gamma_{k'} \quad (k' = 1, 2, \ldots, m' + n'),$$

für das $\gamma_{k'i} = \alpha_{k'i}$ und $\gamma_{k'} = \alpha_{k'}$ für $k' = 1, 2, \ldots, m'$ sowie $\gamma_{k'i} = \beta_{k'-m',i}$ und $\gamma_{k'} = \beta_{k'-m'}$ für $k' = m' + 1, \ldots, m' + n'$ gilt, ist dann und nur dann lösbar, wenn der Schnitt der Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 nicht leer ist. Im Fall der Lösbarkeit ist die Lösungsmannigfaltigkeit dieses Gleichungssystems gleich der Schnittmannigfaltigkeit von M_1 und M_2.

4.* Man beweise: Jede Mannigfaltigkeit des Vektorraumes R^n läßt sich als Lösungsmannigfaltigkeit eines linearen Gleichungssystems beschreiben.

5.* Man beweise: Jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit eines n-dimensionalen Vektorraumes läßt sich als Schnittmannigfaltigkeit von $n - m$ $(n - 1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschreiben.

6. Das quadratische lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt dann und nur dann genau eine Lösung, wenn $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine reguläre quadratische Matrix ist.

§ 11. LINEARE OPERATOREN

1. EINLEITUNG

In diesem Paragraphen untersuchen wir die linearen Abbildungen eines linearen Vektorraumes in sich, die wir lineare Operatoren nennen. Unsere Überlegungen führen zu einigen neuen Begriffen, speziell zu dem für die Mathematik wesentlichen Gruppenbegriff. Auf der Grundlage der Untersuchungen über lineare Operatoren

wird die im § 4 offen gelassene Frage nach den Beziehungen zwischen den Koordinaten eines gegebenen Vektors in bezug auf zwei verschiedene Basen beantwortet. Die entsprechende Frage nach dem Zusammenhang zwischen den verschiedenen Matrizen, die der gleichen linearen Abbildung bei verschiedenen Basen im Urbildraum und im Bildraum zugeordnet sind, wird ebenfalls behandelt.

2. LINEARE OPERATOREN; DER GRUPPENBEGRIFF; DIE GRUPPE $\mathscr{G}(V)$ DER REGULÄREN LINEAREN OPERATOREN

Es sei V ein linearer Vektorraum. Ein *linearer Operator A* auf dem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung von V in sich. Wir können also die in den §§ 8 und 9 bewiesenen Sätze für die linearen Operatoren auf einem Vektorraum V in Anspruch nehmen, wenn wir berücksichtigen, daß $V' = V$, also $AV \subseteqq V$ ist. *Das Bild des Vektorraumes V bei einem linearen Operator A ist ein Teilraum von V.*

Wir betrachten einige Beispiele linearer Operatoren.

1°. Es sei P_n der Vektorraum der Polynome in einer Unbestimmten t, deren Grad kleiner als n ist. Die in § 8, Nr. 2, 8° definierte lineare Abbildung D ist ein linearer Operator auf P_n. Es ist $DP_n = P_{n-1} \subseteqq P_n$.

2°. Ist P der Vektorraum aller Polynome in einer Unbestimmten t mit reellen Koeffizienten, so sind die durch

$$Dp = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 t + \cdots + (n-1) \cdot \alpha_{n-1} t^{n-2},$$

$$Ip = \alpha_0 t + \frac{\alpha_1}{2} t^2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{n} t^n$$

für $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$ definierten Abbildungen D und I lineare Operatoren auf dem Vektorraum P.

3°.* Die durch eine Permutation π der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ definierte lineare Abbildung A_π (vgl. § 8, Nr. 2, 4°) ist ein linearer Operator auf dem Vektorraum R^n.*

4°. Ist $R(\mathfrak{M})$ der lineare Vektorraum der auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierten reellwertigen Funktionen und $\mathfrak{M}_1$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$, so erhalten wir einen linearen Operator P_1 durch die Gleichungen

$$P_1 x = x_1$$

mit

$$x_1(a) = \begin{cases} x(a) & \text{für } a \in \mathfrak{M}_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$, so ist $P_1 R(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_2)$, und $R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_2)$ ist ein Teilraum von $R(\mathfrak{M})$ (vgl. § 2, Nr. 3, 1°).

5°.* Ist $D_\infty(\alpha_0, \beta_0)$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ der reellen Achse definierten und dort beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen, so wird durch

$$Df(t) = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

ein linearer Operator D auf $D_\infty(\alpha_0, \beta_0)$ definiert.*

6°.* Die in § 8, Nr. 2, 7° definierte lineare Abbildung I von $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ in $D_{n+1}(\alpha_0, \beta_0)$ ist ein linearer Operator auf dem Vektorraum $D_n(\alpha_0, \beta_0)$, da $D_{n+1}(\alpha_0, \beta_0)$ ein Teilraum von $D_n(\alpha_0, \beta_0)$ ist.*

Die Menge $\mathscr{A}(V, V)$ der linearen Operatoren auf dem Vektorraum V bezeichnen wir kürzer mit $\mathscr{A}(V)$. Aus den Sätzen von § 8, Nr. 3 und 4 folgt:

I. *Die linearen Operatoren auf einem linearen Vektorraum V bilden einen linearen Vektorraum $\mathscr{A}(V)$.*

Das Produkt zweier linearer Operatoren $A_1, A_2 \in \mathscr{A}(V)$ ist stets erklärt, und A_1A_2 ist wiederum ein linearer Operator auf dem Vektorraum V.

Mit den linearen Operatoren auf dem Vektorraum V kann man assoziativ und distributiv rechnen, d. h., für je drei lineare Operatoren $A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{A}(V)$ gelten die Gleichungen

$$(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} (A_1 + A_2)A_3 &= A_1A_3 + A_2A_3, \\ A_1(A_2 + A_3) &= A_1A_2 + A_1A_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir machen darauf aufmerksam, daß für je zwei lineare Operatoren $A_1, A_2 \in \mathscr{A}(V)$ beide Produkte A_1A_2 und A_2A_1 erklärt, aber *im allgemeinen verschieden* sind.

Die beiden Distributivgesetze (2) sind noch zu beweisen, da diese Frage im § 8 nicht behandelt wurde. Ist $x \in V$ ein beliebiger Vektor, so erhalten wir unter Berücksichtigung der im § 8 erklärten Addition und Multiplikation von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} ((A_1 + A_2)A_3)x &= (A_1 + A_2)(A_3x) = A_1(A_3x) + A_2(A_3x) \\ &= (A_1A_3)x + (A_2A_3)x = (A_1A_3 + A_2A_3)x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_1(A_2 + A_3))x &= A_1((A_2 + A_3)x) = A_1(A_2x + A_3x) \\ &= A_1(A_2x) + A_1(A_3x) = (A_1A_2)x + (A_1A_3)x \\ &= (A_1A_2 + A_1A_3)x. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen für jeden Vektor $x \in V$ gelten, erhalten wir aus ihnen die Gleichungen (2).

In der Menge $\mathscr{A}(V)$ gibt es zwei ausgezeichnete lineare Operatoren: Der *Nulloperator* O wird durch

$$Ox \underset{\text{Def.}}{=} o \quad \text{für alle } x \in V$$

definiert und ist gleich dem Nullelement des Vektorraumes $\mathscr{A}(V)$.

Der *Einsoperator* E oder die *Identität* wird durch

$$Ex \underset{\text{Def.}}{=} x \quad \text{für alle } x \in V$$

definiert. *Der Einsoperator E ist eine reguläre lineare Abbildung von V auf sich, und für jeden linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ gilt*

$$EA = A = AE. \tag{3}$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei $x \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt

$$(EA)x = E(Ax) = Ax = A(Ex) = (AE)x,$$

und hieraus folgt die Gleichung (3).

Es sei $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator auf dem Vektorraum V, der den Vektorraum V *auf* sich abbildet und als lineare Abbildung von V auf sich regulär ist. Wir nennen A einen *regulären linearen Operator auf dem Vektorraum* V.

Nach § 8, Nr. 4, Satz VII besitzt A eine Inverse A^{-1}, und für jeden Vektor $x \in V$ gilt $(A^{-1}A)x = x$. Die Inverse A^{-1} ist eine reguläre lineare Abbildung von V auf sich und folglich ein regulärer linearer Operator auf dem Vektorraum V. Wenn wir die Definition des Einsoperators E beachten, können wir die Beziehung $(A^{-1}A)x = x$ für alle $x \in V$ auch in der Form $A^{-1}A = E$ schreiben. Die Menge aller regulären linearen Operatoren auf dem Vektorraum V bezeichnen wir mit $\mathscr{G}(V)$ und beweisen:

II. *Sind A_1 und A_2 lineare Operatoren aus $\mathscr{G}(V)$, so ist auch $A_1A_2 \in \mathscr{G}(V)$. Der Einsoperator E ist aus $\mathscr{G}(V)$, und für jedes $A \in \mathscr{G}(V)$ gilt*

$$AE = A = EA. \tag{3}$$

Zu jedem Operator $A \in \mathscr{G}(V)$ gibt es eine Inverse $A^{-1} \in \mathscr{G}(V)$, und es gilt

$$A^{-1}A = E = AA^{-1}. \tag{4}$$

Die zweite Aussage dieses Satzes sowie einen Teil der dritten Aussage haben wir bereits bewiesen. Betrachten wir zwei lineare Operatoren $A_1, A_2 \in \mathscr{G}(V)$, so ist A_1A_2 als Produkt von regulären Abbildungen selbst eine reguläre Abbildung. Ferner ist $A_1V = V$ und $A_2V = V$ und folglich $(A_1A_2)V = A_1(A_2V) = A_1V = V$. *Das Produkt A_1A_2 zweier regulärer linearer Operatoren ist ein regulärer linearer Operator.*

Es bleibt die Gleichung $AA^{-1} = E$ zu beweisen, und wir betrachten einen beliebigen Vektor $x \in V$. Da A eine reguläre Abbildung ist, gibt es genau ein Urbild $x' = A^{-1}x \in V$, und es gilt $Ax' = x$. Dann ist aber $Ax' = A(A^{-1}x) = (AA^{-1})x = x$, und daraus folgt die Behauptung.

Wir weisen den Leser darauf hin, daß man mit den ganzzahligen Potenzen eines regulären linearen Operators A wie mit den Potenzen einer Zahl rechnen kann. Ist für eine positive ganze Zahl k

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}, \quad A^{-k} = \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k\text{-mal}} \quad \text{und} \quad A^0 = E,$$

so gilt $A^kA^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{k \cdot l}$. Man beachte jedoch, daß sich die Potenz eines Produktes zweier linearer Operatoren nur dann als das Produkt der Potenzen der beiden linearen Operatoren schreiben läßt, wenn die linearen Operatoren miteinander vertauschbar sind. Die Gleichung $(A_1A_2)^k = A_1^kA_2^k$ ist im allgemeinen falsch.

Für die Inverse des Produktes zweier regulärer linearer Operatoren gilt die Gleichung $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$, d. h., *beim Übergang zur Inversen muß man die Reihenfolge der Faktoren vertauschen.*

Aus der Gleichung $(A_1A_2)^{-1} A_1A_2 = E$ folgt zunächst durch Multiplikation mit A_2^{-1} von rechts $(A_1A_2)^{-1} A_1(A_2A_2^{-1}) = A_2^{-1}$ oder $(A_1A_2)^{-1} A_1 = A_2^{-1}$. Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit A_1^{-1}, so ergibt sich die obige Gleichung für die Inverse des Produktes.

Eine Menge G von Elementen $a, b, \ldots$, in der für je zwei Elemente $a, b \in G$ ein Produkt ab erklärt ist, das wieder der Menge G angehört, heißt eine *Gruppe*, wenn folgendes gilt:

a) Die Multiplikation ist assoziativ: für je drei Elemente $a, b, c \in G$ gilt

$$(ab)\,c = a(bc);$$

b) in G gibt es ein Element e, so daß für jedes $a \in G$

$$ae = a = ea$$

gilt; das Element e wird *Einselement* genannt;

c) zu jedem $a \in G$ gibt es in G ein Element $a^{-1} \in G$, so daß

$$aa^{-1} = e = a^{-1}a$$

ist; das Element a^{-1} heißt *Inverses* zu a.[1])

Benutzen wir diese Definition und berücksichtigen die Assoziativität der Multiplikation von linearen Abbildungen, so können wir den Satz II wie folgt aussprechen:

II'. *Die regulären linearen Operatoren auf einem linearen Vektorraum V bilden eine Gruppe $\mathcal{G}(V)$.*

Ein linearer Vektorraum $\mathcal{A}$, in dem für je zwei Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ ein Produkt ab erklärt ist, das wiederum ein Element von $\mathcal{A}$ ist, heißt eine *Algebra*, wenn die Multiplikation assoziativ ist und außerdem die beiden distributiven Gesetze (2) gelten.

Benutzen wir diese Definition, so läßt sich der Satz I folgendermaßen formulieren:

I'. *Die linearen Operatoren auf einem linearen Vektorraum V bilden eine Algebra $\mathcal{A}(V)$.*

3. REGULÄRE QUADRATISCHE MATRIZEN; DIE INVERSE; DIE ALLGEMEINE LINEARE GRUPPE $GL(n)$

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und A ein linearer Operator auf dem Vektorraum V. Aus den Ergebnissen von § 9, Nr. 2 erhalten wir als Folgerung, wenn wir $V' = V$ und $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ setzen:

III. *Jedem linearen Operator $A \in \mathcal{A}(V)$ entspricht eine n-reihige quadratische Matrix $A = \|A\|$ ($n = \dim V$).*

[1]) Aus den angegebenen Bedingungen läßt sich folgern, daß die Elemente e und a^{-1} eindeutig bestimmt sind, so daß man von *dem* Einselement e und von *dem* Inversen a^{-1} eines Elementes a sprechen kann. Dem interessierten Leser wird empfohlen, dies in Analogie zu § 1, Nr. 5, Satz IV und V zu beweisen.

Die Spalten der Matrix A sind die Koordinaten der Bilder $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ der Basisvektoren von V in bezug auf die Basis $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Der lineare Operator A ist durch die zugeordnete Matrix A eindeutig bestimmt.

Wir interessieren uns vor allem für die regulären linearen Operatoren auf dem Vektorraum V und beweisen den Satz:

IV. *Ist A eine reguläre lineare Abbildung des endlichdimensionalen linearen Vektorraumes V in sich, so ist $AV = V$.*

Ist A eine lineare Abbildung des endlichdimensionalen Vektorraumes V auf sich, so ist A regulär.

Zum Beweis betrachten wir eine reguläre lineare Abbildung A von V in sich. Ihr Bild AV ist ein linearer Teilraum von V. Aus der Regularität der Abbildung A folgt aber $\dim AV = \dim V$ und daraus $AV = V$. Die Abbildung A ist also ein regulärer linearer Operator.

Ist A eine lineare Abbildung von V *auf* sich, so gilt $AV = V$. Dann ist aber $r(A) = \dim AV = \dim V$, und folglich ist A ein regulärer linearer Operator.

Nach Satz IV ist ein linearer Operator A auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V genau dann regulär, wenn er als lineare Abbildung von V in sich regulär ist oder den Vektorraum V auf sich abbildet. Ist V ein unendlichdimensionaler Vektorraum, so gibt es lineare Operatoren, die als lineare Abbildungen von V in sich regulär sind und deren Bild ein echter Teilraum von V ist. Ebenso gibt es in einem unendlichdimensionalen Vektorraum V lineare Abbildungen von V auf sich, die nicht regulär sind.

7°. Als Beispiel erwähnen wir die linearen Operatoren D und I auf dem unendlichdimensionalen Vektorraum P aller Polynome in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten. Der Operator D ist eine lineare Abbildung von P auf sich, die nicht regulär ist, und der Operator I ist eine reguläre lineare Abbildung von P in sich, für die $IP \neq P$ ist. Der Kern der Abbildung D besteht aus allen Polynomen nullten Grades, das Bild von I besteht aus allen Polynomen ohne konstantes Glied ($\alpha_0 = 0$). Es ist $DI = E$, aber $ID \neq E$.

Wird in dem n-dimensionalen Vektorraum V eine Basis $\mathfrak{B}$ ausgezeichnet, so entspricht jedem regulären linearen Operator auf dem Vektorraum V eine reguläre n-reihige quadratische Matrix. Wir erhalten eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den regulären linearen Operatoren auf dem Vektorraum V und den regulären n-reihigen quadratischen Matrizen.

Satz II′ läßt sich auf die regulären n-reihigen quadratischen Matrizen übertragen.

V. *Die regulären n-reihigen quadratischen Matrizen bilden eine Gruppe.*

Die Gruppe der regulären n-reihigen quadratischen Matrizen heißt die *allgemeine lineare Gruppe* und wird mit $GL(n)$ (General Linear Group) bezeichnet.

Zum Beweis von Satz V sei daran erinnert, daß das Produkt zweier Matrizen vom Typ (n, n) stets erklärt und wiederum eine Matrix vom Typ (n, n) ist. Ferner ist das

Produkt zweier regulärer Matrizen eine reguläre Matrix. In der Menge $GL(n)$ der regulären n-reihigen quadratischen Matrizen ist also für je zwei Elemente ein Produkt erklärt, das wieder zu dieser Menge gehört. Aus den allgemeinen Betrachtungen über die Matrizenmultiplikation ist darüber hinaus bekannt, daß die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Bezeichnet $\Phi_{\mathfrak{B}} \underset{\text{Def.}}{=} \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}$ diejenige Abbildung, die jedem linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ die in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ von V eindeutig bestimmte Matrix $A = \|A\|$ zuordnet[1]): $\Phi_{\mathfrak{B}}(A) = \|A\|$, so folgt aus § 9, Nr. 4, Formel (12)

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(A_1A_2) = \|A_1A_2\| = \|A_1\| \cdot \|A_2\| = \Phi_{\mathfrak{B}}(A_1) \cdot \Phi_{\mathfrak{B}}(A_2).$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich damit

$$\|A\| \cdot \|E\| = \|AE\| = \|A\| = \|EA\| = \|E\| \cdot \|A\|$$

und

$$\|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \|A^{-1}A\| = \|E\| = \|AA^{-1}\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

In der Menge $GL(n)$ gibt es also eine Matrix $E = \|E\| = \Phi_{\mathfrak{B}}E$, so daß für jede Matrix $A = \|A\| = \Phi_{\mathfrak{B}}A \in GL(n)$

$$A \cdot E = A = E \cdot A$$

gilt, und zu jeder Matrix $A = \|A\| = \Phi_{\mathfrak{B}}A \in GL(n)$ gibt es eine reguläre Matrix $A^{-1} = \|A^{-1}\| = \Phi_{\mathfrak{B}}A^{-1} \in GL(n)$, so daß

$$A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$$

ist. *Die Menge $GL(n)$ ist eine Gruppe.*

Die Matrix $E = \Phi_{\mathfrak{B}}E$ heißt *Einheitsmatrix.*

Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, so gilt $Ex_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Der Vektor Ex_1 besitzt also die Koordinaten $1, 0, \ldots, 0$; der Vektor Ex_2 besitzt die Koordinaten $0, 1, \ldots, 0$ usw. Daraus folgt für die Einheitsmatrix

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind. Erinnern wir uns der Definition des Kronecker-Symbols $\delta_{i'i}$, so können wir

$$E = \|\delta_{i'i}\|_{n,n} \tag{5'}$$

[1]) Die hier definierte Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ist von der in § 5, Nr. 3 erklärten, ebenfalls mit $\Phi_{\mathfrak{B}}$ bezeichneten Abbildung verschieden. Eine Verwechslung ist nicht zu befürchten, da aus dem Argument der Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$ hervorgeht, um welche der beiden Abbildungen es sich handelt.

schreiben. Die Matrix $A^{-1} = \Phi_{\mathfrak{B}}A^{-1}$ nennt man die zu $A = \Phi_{\mathfrak{B}}A$ *inverse* Matrix. Wir haben festgestellt: *Jede reguläre n-reihige quadratische Matrix besitzt eine inverse Matrix.*

Es sei $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine reguläre quadratische Matrix. Die Elemente der inversen Matrix A^{-1} bezeichnen wir mit $\alpha_{i'i}^{(-1)}$ $(i', i = 1, ..., n)$. Die Gleichung $A \cdot A^{-1} = E$ läßt sich dann in der Form

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i'j} \cdot \alpha_{ji}^{(-1)} \right\|_{n,n} = \|\delta_{i'i}\|_{n,n}$$

schreiben und faßt die n^2 Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i'j} \cdot \alpha_{ji}^{(-1)} = \delta_{i'i} \quad (i', i = 1, ..., n)$$

zusammen. Betrachten wir das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i'j} \cdot \xi_{ji} = \delta_{i'i} \quad (i', i = 1, ..., n)$$

von n^2 Gleichungen in $\xi_{11}, ..., \xi_{1n}, \xi_{21}, ..., \xi_{2n}, ..., \xi_{n1}, ..., \xi_{nn}$, so können wir sagen: *Die Elemente $\alpha_{i'i}^{(-1)}$ $(i', i = 1, ..., n)$ der zu $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ inversen Matrix A^{-1} sind Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems von n^2 Gleichungen mit der quadratischen n^2-reihigen Koeffizientenmatrix*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn} & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 \quad\quad 0 & \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots 0 & \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn} & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Später werden wir eine andere Methode zur Berechnung der inversen Matrix kennenlernen.

Wir weisen den Leser darauf hin, daß sich einerseits die Elemente der inversen Matrix einer regulären Matrix durch ein lineares Gleichungssystem mit (regulärer!) n^2-reihiger quadratischer Koeffizientenmatrix bestimmen lassen, daß sich aber andererseits die Kenntnis der inversen Matrix zur einfachen Bestimmung der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit regulärer n-reihiger quadratischer Koeffizientenmatrix verwenden läßt. Ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'}$ ein lineares Gleichungssystem und $A^{-1} = \|\alpha_{i'i}^{(-1)}\|_{n,n}$ die inverse Matrix der regulären Koeffizientenmatrix A, so schreiben wir das lineare Gleichungssystem in der Form $A \cdot \hat{x} \doteq \hat{b}$. Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhalten wir durch $\hat{x} = A^{-1} \cdot \hat{b}$; denn es ist $A \cdot (A^{-1} \cdot \hat{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \hat{b} = E \cdot \hat{b} = \hat{b}$. Aus der Gleichung $\hat{x} = A^{-1} \cdot \hat{b}$ folgt

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}^{(-1)} \cdot \beta_i \quad (i' = 1, ..., n).$$

Wie im Fall der regulären linearen Operatoren machen wir den Leser darauf aufmerksam, daß man mit den ganzzahligen Potenzen einer regulären quadratischen Matrix A wie mit den Potenzen einer Zahl rechnen kann. Dies gilt nicht mehr für

die Potenzen eines Produktes von zwei oder mehr quadratischen Matrizen. Bei der Berechnung der Inversen eines Produktes von zwei regulären Matrizen müssen die beiden Faktoren vertauscht werden. Es gilt $(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

8⁰. Als Beispiel betrachten wir die zweireihigen quadratischen Matrizen

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix A ist dann und nur dann regulär, wenn $\delta = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \neq 0$ ist.

Die Gruppe $GL(2)$ besteht also aus allen Matrizen A, für die $\delta = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \neq 0$ ist. Das Einselement der Gruppe $GL(2)$ ist die Einheitsmatrix

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ist A eine Matrix aus $GL(2)$, so ist

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha_{22}}{\delta} & -\dfrac{\alpha_{12}}{\delta} \\ -\dfrac{\alpha_{21}}{\delta} & \dfrac{\alpha_{11}}{\delta} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{Vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{Vmatrix}.$$

4. DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER KOORDINATEN BEIM ÜBERGANG ZU EINER NEUEN BASIS

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Vektors in bezug auf verschiedene Basen des betrachteten Vektorraumes. Man spricht von dem *Transformationsverhalten der Koordinaten eines Vektors beim Übergang zu einer neuen Basis.*

Es sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum und $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V. $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ sei eine weitere Basis von V. In § 5, Nr. 3 haben wir darauf hingewiesen, daß die Koordinaten eines Vektors $x \in V$ von der Wahl der Basis abhängen. Ist etwa $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_n y_n$, so sind die Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1$ im allgemeinen von den Koordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_2$ verschieden. Wir wollen untersuchen, wie sich die Koordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_n$ durch die Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ausdrücken lassen. Dazu betrachten wir den durch die Gleichungen

$$Ax_i = y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

definierten linearen Operator auf dem Vektorraum V. Da der lineare Operator A nach Definition eine Basis von V auf eine Basis von V abbildet, ist $\dim AV = \dim V$, und A ist ein regulärer linearer Operator. Dem regulären linearen Operator A entspricht eine reguläre quadratische Matrix in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1$, die wir mit $\Phi_{\mathfrak{B}_1}(A) = A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ bezeichnen. Es ist

$$Ax_i = y_i = \alpha_{1i} x_1 + \cdots + \alpha_{ni} x_n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oder, in der Summenschreibweise,

$$Ax_i = y_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Setzen wir diese Gleichung in die Gleichung $x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i$ ein, so erhalten wir

$$x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1}^{n} (\alpha_{i'i} \cdot \eta_i) x_{i'}.$$

Durch Vertauschung der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$x = \sum_{i'=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i \right) x_{i'} = \sum_{i'=1}^{n} \xi_{i'} x_{i'}.$$

Da die Koordinaten des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1$ eindeutig bestimmt sind, folgen hieraus die Gleichungen

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i \quad (i' = 1, \ldots, n).$$

VI. *Sind* $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *und* $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *zwei Basen des linearen Vektorraumes* V *und gilt*

$$y_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

so ist $A = \|\alpha_{i'i}\|$ *eine reguläre quadratische Matrix, und die Koordinaten* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *eines Vektors* $x \in V$ *in bezug auf die Basis* $\mathfrak{B}_1$ *lassen sich vermöge der Gleichung*

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i \quad (i' = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

durch die Koordinaten $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *des Vektors* x *in bezug auf die Basis* $\mathfrak{B}_2$ *ausdrücken.*

Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, so erhalten wir aus den Gleichungen

$$x_i = \sum_{i'=1}^{n} \beta_{i'i} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6'}$$

eine reguläre quadratische Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|$, und es gilt

$$\eta_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_i \quad (i' = 1, \ldots, n). \tag{7'}$$

Setzen wir die Gleichungen (6) in die Gleichungen (6′) ein, so folgt

$$x_i = \sum_{i'=1}^{n} \beta_{i'i} \sum_{i''=1}^{n} \alpha_{i''i'} x_{i''} = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i''=1}^{n} (\alpha_{i''i'} \cdot \beta_{i'i}) x_{i''} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Vertauschen wir die Summationsreihenfolge, so ergibt sich

$$x_i = \sum_{i''=1}^{n} \left(\sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i''i'} \cdot \beta_{i'i} \right) x_{i''} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Die Zahlen $\sum_{i'=1}^{n} \alpha_{1i'} \cdot \beta_{i'i}, \ldots, \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{ni'} \cdot \beta_{i'i}$ sind die Koordinaten des Basisvektors x_i in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Infolgedessen ist

$$\sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i''i'} \cdot \beta_{i'i} = \delta_{i''i} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i'' = i, \\ 0 & \text{für} \quad i'' \neq i. \end{cases}$$

Die Zahlen $\sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i''i'} \cdot \beta_{i'i}$ sind aber die Elemente der Produktmatrix $A \cdot B = \left\| \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i''i'} \cdot \beta_{i'i} \right\|$, und folglich gilt $A \cdot B = E$.

Da A eine reguläre quadratische Matrix ist, existiert die inverse Matrix A^{-1}, und es ist $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B$ sowie $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot E = A^{-1}$ oder $B = A^{-1}$.

VII. *Sind $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraumes V und ist*

$$y_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

und

$$x_i = \sum_{i'=1}^{n} \beta_{i'i} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6'}$$

so sind die quadratischen Matrizen $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ und $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ regulär, und es gilt

$$B = A^{-1} \quad \textit{und} \quad A = B^{-1}.$$

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bzw. $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die Koordinaten eines Vektors $x \in V$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$, so ist

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i \quad (i' = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

und

$$\eta_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_i \quad (i' = 1, \ldots, n). \tag{7'}$$

Damit haben wir die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Vektors in bezug auf verschiedene Basen des linearen Vektorraumes beantwortet. Die Gleichungen (7) und (7′) werden das *Transformationsgesetz der Koordinaten*

beim Übergang zu einer anderen Basis genannt. Im folgenden Abschnitt untersuchen wir das entsprechende Problem für die linearen Abbildungen eines Vektorraumes in einen anderen.

5. DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER EINER LINEAREN ABBILDUNG ZUGEORDNETEN MATRIX BEIM ÜBERGANG ZU EINER NEUEN BASIS IM URBILD- UND BILDRAUM; DIE NORMALFORM EINER LINEAREN ABBILDUNG

Wir betrachten zwei endlichdimensionale lineare Vektorräume V und V'. Es sei $n = \dim V$, $n' = \dim V'$, und in jedem dieser Vektorräume seien zwei Basen $\mathfrak{B}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$ bzw. $\mathfrak{B}'_1 = \{\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n'}\}$, $\mathfrak{B}'_2 = \{\boldsymbol{y}'_1, \ldots, \boldsymbol{y}'_{n'}\}$ gegeben. Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in V', so entspricht ihr eine Matrix $\Phi_{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'_1}(A) = A^{(1)} = \|\alpha^{(1)}_{i'i}\|_{n',n}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1$ von V und $\mathfrak{B}'_1$ von V' sowie eine Matrix $\Phi_{\mathfrak{B}_2,\mathfrak{B}'_2}(A) = A^{(2)} = \|\alpha^{(2)}_{i'i}\|_{n',n}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_2$ von V und $\mathfrak{B}'_2$ von V'. Wir suchen eine Beziehung zwischen den Matrizen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$.

Es sei $\boldsymbol{B}$ der durch die Gleichungen

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}\boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

definierte reguläre lineare Operator auf dem Vektorraum V, und entsprechend sei der reguläre lineare Operator $\boldsymbol{B}'$ auf dem Vektorraum V' durch die Gleichungen

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}'_{j'} = \boldsymbol{y}'_{j'} = \sum_{i'=1}^{n} \beta'_{i'j'}\boldsymbol{x}'_{i'} \quad (j' = 1, 2, \ldots, n')$$

definiert.

Die Matrizen $A^{(1)} = \|\alpha^{(1)}_{i'i}\|_{n',n}$ und $A^{(2)} = \|\alpha^{(2)}_{i'i}\|_{n',n}$ werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(1)}_{i'i}\boldsymbol{x}'_{i'}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i}\boldsymbol{y}'_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ersetzen wir $\boldsymbol{y}_i$ durch $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i$, so gilt

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i}\boldsymbol{y}'_{i'}.$$

Auf diese Gleichung wenden wir den linearen Operator $\boldsymbol{B}'^{-1}$ an und erhalten

$$(\boldsymbol{B}'^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i}\boldsymbol{B}'^{-1}\boldsymbol{y}'_{i'} = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i}\boldsymbol{x}'_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Es ist

$$\Phi_{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}'_1}(\boldsymbol{B}'^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = A^{(2)} = \|\alpha^{(2)}_{i'i}\| = \Phi_{\mathfrak{B}_2,\mathfrak{B}'_2}(A).$$

Daraus ergibt sich auf Grund der in § 9, Nr. 4 bewiesenen Multiplikativität der Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$

$$\Phi_{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_1'}(B'^{-1}AB) = \Phi_{\mathfrak{B}_1'}(B'^{-1}) \cdot \Phi_{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_1'}(A) \cdot \Phi_{\mathfrak{B}_1}(B).$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen

$$\Phi_{\mathfrak{B}_1}(B) = B = \|\beta_{ij}\|_{n,n} \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathfrak{B}_1'}(B') = B' = \|\beta'_{i'j'}\|_{n',n'},$$

so folgt

$$A^{(2)} = B'^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot B.$$

VIII. *Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung des n-dimensionalen Vektorraumes V in den n'-dimensionalen Vektorraum V' und sind $A^{(1)} = \|\alpha^{(1)}_{i'i}\|_{n',n}$ bzw. $A^{(2)} = \|\alpha^{(2)}_{i'i}\|_{n',n}$ die dieser Abbildung zugeordneten Matrizen bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und $\mathfrak{B}_1' = \{x_1', \ldots, x_{n'}'\}$ von V' bzw. bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ von V und $\mathfrak{B}_2' = \{y_1', \ldots, y_{n'}'\}$ von V', so gilt*

$$A^{(2)} = B'^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot B. \tag{8}$$

Die regulären Matrizen $B = \|\beta_{ij}\|_{n,n}$ sowie $B' = \|\beta'_{i'j'}\|_{n',n'}$ werden durch die Gleichungen

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} x_i \quad \text{und} \quad y'_{j'} = \sum_{i'=1}^{n'} \beta'_{i'j'} x'_{i'} \quad (j = 1, \ldots, n;\, j' = 1, \ldots, n')$$

bestimmt.

Durch Multiplikation der Gleichung (8) mit der regulären Matrix B' von links und der ebenfalls regulären Matrix B^{-1} von rechts erhalten wir die Gleichung

$$A^{(1)} = B' \cdot A^{(2)} \cdot B^{-1}, \tag{8'}$$

in der die Matrix $A^{(1)}$ durch die Matrix $A^{(2)}$ ausgedrückt wird. Die Gleichungen (8) und (8′) nennt man das *Transformationsgesetz der einer linearen Abbildung zugeordneten Matrix beim Übergang zu einer anderen Basis im Urbildraum und Bildraum.*

Nachdem wir festgestellt haben, wie sich der Übergang von einer Basis $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_1'$ zu einer neuen Basis $\mathfrak{B}_2$ bzw. $\mathfrak{B}_2'$ in den Vektorräumen V und V' auf die einer linearen Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ zugeordnete Matrix auswirkt, wollen wir versuchen, die Basen im Vektorraum V bzw. V' so zu wählen, daß die der Abbildung A zugeordnete Matrix eine möglichst einfache Gestalt erhält.

Es sei $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine gegebene lineare Abbildung, $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $\mathfrak{B}_1' = \{x_1', \ldots, x_{n'}'\}$ seien gegebene Basen von V bzw. V' und $A^{(1)}$ die A zugeordnete Matrix vom Typ (n', n).

Wir betrachten den Kern $V_0 = A^{-1}\{o'\}$ der linearen Abbildung A. Dieser Kern ist ein d-dimensionaler Teilraum von V, wobei d den Defekt der Abbildung A bezeichnet. Wir wählen eine Basis des Teilraumes V_0, die wir mit $y_{r+1}, \ldots, y_n$ bezeichnen. Es sei daran erinnert (§ 8, Nr. 5, Satz X), daß $d + r = n$ ist, wenn r den Rang der linearen Abbildung A bezeichnet. Die Basis $y_{r+1}, \ldots, y_n$ ergänzen wir durch Vektoren $y_1, \ldots, y_r$ zu einer Basis $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ von V. Aus dem Beweis von Satz X aus

§ 8, Nr. 5 folgt, daß die Vektoren $Ay_1 = y'_1, \ldots, Ay_r = y'_r$ eine Basis des Bildraumes AV bilden. Da AV ein linearer Teilraum von V' ist, können wir diese Vektoren zu einer Basis $\mathfrak{B}'_2 = \{y'_1, \ldots, y'_{n'}\}$ des Vektorraumes V' ergänzen. Wir bestimmen nun die Matrix $\Phi_{\mathfrak{B}_2,\mathfrak{B}'_2}(A) = A^{(2)} = \|\alpha^{(2)}_{i'i}\|_{n',n}$. Es ist

$$Ay_i = y'_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i} y'_{i'} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$Ay_i = o' = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha^{(2)}_{i'i} y'_{i'} \quad \text{für} \quad i = r+1, \ldots, n.$$

Damit ergibt sich für die Matrix $A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Es ist $\alpha^{(2)}_{ii} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, r$, während alle übrigen Elemente der Matrix $A^{(2)}$ gleich Null sind.

Beachten wir die Gleichung (8) und berücksichtigen, daß jede Matrix als Matrix einer geeigneten linearen Abbildung aufgefaßt werden kann, so folgt der Satz:

IX. *Zu jeder Matrix* $A^{(1)} = \|\alpha^{(1)}_{i'i}\|_{n',n}$ *gibt es zwei reguläre Matrizen* $B = \|\beta_{ij}\|_{n,n}$ *und* $B' = \|\beta'_{i'j'}\|_{n',n'}$, *so daß das Produkt* $B'^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot B = A^{(2)}$ *eine Matrix der Form* (9) *ist.*

Der Leser erinnere sich, daß wir einen entsprechenden Satz bereits auf anderem Wege bewiesen haben (vgl. § 9, Nr. 7, Satz XIII). Dabei haben wir eine Möglichkeit zur Berechnung der regulären Matrizen B und B'^{-1} angegeben.

Die Matrix $A^{(2)}$ der Form (9) heißt die *Normalform der linearen Abbildung* $A \in \mathscr{A}(V, V')$.

6. DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER EINEM LINEAREN OPERATOR ZUGEORDNETEN MATRIX BEIM ÜBERGANG ZU EINER NEUEN BASIS; INVARIANTE TEILRÄUME; OPERATOREN EINFACHER STRUKTUR; EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Wir betrachten jetzt einen linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$. Mit $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ bezeichnen wir wieder zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraumes V, und $\Phi_{\mathfrak{B}_1} A = A^{(1)}$ sowie $\Phi_{\mathfrak{B}_2} A = A^{(2)}$ seien die dem linearen Operator A in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zugeordneten Matrizen. Die Überlegungen von

Nr. 5 lassen sich auf diesen Fall anwenden, wenn man $V' = V$, $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2$ und damit $B' = B$ setzt. Es ergibt sich der Satz

X. *Ist $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen linearen Vektorraum V und sind $A^{(1)}$ bzw. $A^{(2)}$ die dem Operator A bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ zugeordneten n-reihigen quadratischen Matrizen, so ist*

$$A^{(2)} = B^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot B \quad \textit{und} \quad A^{(1)} = B \cdot A^{(2)} \cdot B^{-1}. \tag{10}$$

Die reguläre Matrix $B = \|\beta_{ij}\|_{n,n}$ wird dabei durch die Gleichungen

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} x_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

bestimmt.

Die Gleichungen (10) nennt man das *Transformationsgesetz der einem linearen Operator zugeordneten Matrix beim Übergang zu einer neuen Basis.*

Die Frage nach einer Basis des linearen Vektorraumes V, in bezug auf die die Matrix eines gegebenen linearen Operators eine möglichst einfache Gestalt annimmt, ist ungleich schwieriger zu beantworten als die in Nr. 5 untersuchte Frage nach der Normalform einer linearen Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum V'. Entsprechend ist auch die sogenannte Normalform eines linearen Operators im allgemeinen ungleich komplizierter als die oben abgeleitete Normalform einer linearen Abbildung.

Es sei $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator auf dem linearen Vektorraum V. Ein linearer Teilraum W von V heißt *invariant in bezug auf den Operator A*, wenn $AW \subseteq W$ ist. Das bedeutet, daß jeder Vektor $x \in W$ durch A auf einen Vektor $Ax \in W$ abgebildet wird. Den linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ können wir dann auch als linearen Operator $A_0 \in \mathscr{A}(W)$ auf dem Teilraum W auffassen: $A_0 x \underset{\text{Def.}}{=} Ax$ für alle $x \in W$.

Ist A ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen Vektorraum V und W ein m-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum von V, so wählen wir eine Basis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \dots, x_m\}$ von W und ergänzen sie zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ von V. Da W bezüglich A invariant ist, ist $Ax_i \in W$ $(i = 1, \dots, m)$, und folglich ist Ax_i eine Linearkombination der Basisvektoren $x_1, \dots, x_m$:

$$Ax_i = \alpha_{1i} x_1 + \cdots + \alpha_{mi} x_m \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ferner sei

$$Ax_j = \alpha_{1j} x_1 + \cdots + \alpha_{mj} x_m + \alpha_{m+1,j} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{nj} x_n \quad (j = m+1, \dots, n).$$

Dem linearen Operator A entspricht dann bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ eine Matrix A der Form

$$A = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{m+1,m+1} & \dots & \alpha_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

in deren linker unterer Ecke alle Elemente gleich Null sind. Die in der linken oberen Ecke stehende „Teilmatrix"

$$A_0 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{Vmatrix}$$

ist diejenige Matrix, die dem Operator $A_0 \in \mathscr{A}(W)$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_0$ von W entspricht.

Die Bestimmung bezüglich A invarianter Teilräume eines n-dimensionalen Vektorraumes V führt also zu einer Vereinfachung der A zugeordneten Matrix.

Die Form dieser Matrix läßt sich weiter vereinfachen, wenn in V eine Basis existiert, die sich aus den Basen invarianter Teilräume zusammensetzt.

Es seien $W_1, \dots, W_s$ bezüglich A invariante lineare Teilräume von V. Mit $\mathfrak{B}_\sigma = \{x_1^{(\sigma)}, \dots, x_{m_\sigma}^{(\sigma)}\}$ bezeichnen wir die Basis von W_σ $(\sigma = 1, 2, \dots, s)$, und $\mathfrak{B}^{(0)} = \{x_1^{(1)}, \dots, x_{m_1}^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_{m_s}^{(s)}\}$ sei eine Basis von V $(m_1 + \dots + m_s = n)$. Aus der Invarianz der linearen Teilräume W_σ folgen die Gleichungen

$$Ax_i^{(\sigma)} = \alpha_{1i}^{(\sigma)} x_1^{(\sigma)} + \dots + \alpha_{m_\sigma i}^{(\sigma)} x_{m_\sigma}^{(\sigma)} \quad (i = 1, 2, \dots, m_\sigma).$$

Dem Operator A entspricht bezüglich $\mathfrak{B}^{(0)}$ eine Matrix $A^{(0)}$ der Form

$$A^{(0)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \dots & \alpha_{1m_1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m_1 1}^{(1)} & \dots & \alpha_{m_1 m_1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{11}^{(2)} & \dots & \alpha_{1m_2}^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{m_2 1}^{(2)} & \dots & \alpha_{m_2 m_2}^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_{11}^{(s)} & \dots & \alpha_{1m_s}^{(s)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_{m_s 1}^{(s)} & \dots & \alpha_{m_s m_s}^{(s)} \end{Vmatrix}.$$

Bezeichnen wir den linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ als Operator auf dem invarianten Teilraum W_σ mit A_σ:

$$A_\sigma x \underset{\text{Def.}}{=} Ax \quad \text{für} \quad x \in W_\sigma, \quad A_\sigma \in \mathscr{A}(W_\sigma) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s),$$

so entspricht dem linearen Operator A_σ die Matrix

$$A_\sigma = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^{(\sigma)} & \dots & \alpha_{1m_\sigma}^{(\sigma)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m_\sigma 1}^{(\sigma)} & \dots & \alpha_{m_\sigma m_\sigma}^{(\sigma)} \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix $A^{(0)}$ setzt sich aus den längs der Hauptdiagonale aufgereihten „Teilmatrizen" A_σ $(\sigma = 1, 2, \dots, s)$ zusammen. Wir schreiben zur Abkürzung

$$A^{(0)} = \begin{Vmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{Vmatrix}.$$

Die Frage nach einer Normalform für den linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ zerfällt in zwei Teilfragen: a) nach der Existenz und der Bestimmung möglichst kleiner invarianter Teilräume $W_1, \ldots, W_s$, aus deren Basen sich eine Basis von V zusammensetzen läßt; b) nach einer Normalform für die Operatoren A_σ auf den in a) bestimmten minimalen Teilräumen.

Die Untersuchung des allgemeinen Normalformenproblems geht über den Rahmen dieses Buches hinaus. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des einfachsten Falles, der offenbar dann vorliegt, wenn n eindimensionale bezüglich A invariante Teilräume $W_1, \ldots, W_n$ in V existieren, deren Basisvektoren $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis $\mathfrak{B}^{(1)}$ von V bilden. In diesem Fall heißt A ein *Operator einfacher Struktur.*

Ist W ein eindimensionaler, bezüglich A invarianter Teilraum, so gilt für jeden Vektor $x \in W$

$$Ax = \lambda x \tag{11}$$

mit einer von x unabhängigen reellen Zahl λ. Sind nämlich x_1, x_2 zwei Vektoren aus W und ist etwa $x_1 \neq o$, so gibt es eine reelle Zahl α, so daß $x_2 = \alpha x_1$ ist. Dann folgt aus $Ax_1 = \lambda x_1$

$$Ax_2 = A\alpha x_1 = \alpha A x_1 = \alpha(\lambda x_1) = (\alpha \cdot \lambda) x_1 = \lambda(\alpha x_1) = \lambda x_2 .$$

Die Gleichung (11) ist für die Untersuchung der Struktur linearer Operatoren von großer Bedeutung. Gilt

$$Ax = \lambda x \tag{11}$$

für einen linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$, einen Vektor $x \neq o$, $x \in V$ und eine reelle Zahl $\lambda \in R$, so heißt λ ein *Eigenwert des Operators* A und x ein *Eigenvektor zum Eigenwert* λ. Wir stellen fest, daß *jedem eindimensionalen, bezüglich A invarianten Teilraum W ein Eigenwert λ von A entspricht. Ist umgekehrt λ ein Eigenwert des Operators A, so gibt es einen zugehörigen Eigenvektor $x \neq o$, der einen eindimensionalen bezüglich A invarianten Teilraum $W = L(\{x\})$ erzeugt.* Ist etwa $y = \beta x \in W$, so gilt $Ay = A\beta x = \beta A x = (\beta \cdot \lambda) x \in W = L(\{x\})$, und W ist invariant bezüglich A.

Betrachten wir nun einen Operator einfacher Struktur $A \in \mathscr{A}(V)$, so gibt es n eindimensionale, bezüglich A invariante Teilräume $W_1, \ldots, W_n$. Ihnen entsprechen n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des Operators A (die nicht alle verschieden zu sein brauchen). Die erzeugenden Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ der eindimensionalen Teilräume $W_1, \ldots, W_n$ sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und, da sie nach Voraussetzung eine Basis von V bilden, linear unabhängig.

Ein Operator einfacher Struktur A auf einem n-dimensionalen Vektorraum V besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren in V.

Dieser Satz läßt sich umkehren. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte des Operators A und $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Eigenvektoren zu

diesen Eigenwerten, so erzeugt jeder Eigenvektor $x_j \neq o$ $(j = 1, \ldots, n)$ einen eindimensionalen Teilraum $W_j = L(\{x_j\})$, der bezüglich A invariant ist. In V gibt es demnach n eindimensionale, bezüglich A invariante Teilräume, deren Basisvektoren eine Basis von V bilden: A ist ein Operator einfacher Struktur. Wir haben damit das folgende Kriterium bewiesen:

XI. *Der lineare Operator A auf dem n-dimensionalen Vektorraum V ist dann und nur dann ein Operator einfacher Struktur, wenn er n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.*

Für einen Operator einfacher Struktur A auf dem n-dimensionalen Vektorraum V gibt es eine Basis $\mathfrak{B}^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V, die aus n linear unabhängigen Eigenvektoren des Operators A besteht. Es gilt

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

und dem Operator A entspricht bezüglich der Basis $\mathfrak{B}^{(1)}$ eine Diagonalmatrix $A^{(1)}$, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A stehen:

$$A^{(1)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix $A^{(1)}$ nennen wir die *Normalform des Operators einfacher Struktur A* [1]) und beweisen:

XII. *Der lineare Operator A auf dem n-dimensionalen Vektorraum V ist dann und nur dann ein Operator einfacher Struktur, wenn es eine Basis $\mathfrak{B}^{(1)}$ von V gibt, so daß die dem Operator A bezüglich $\mathfrak{B}^{(1)}$ zugeordnete Matrix $A^{(1)}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Die eine Richtung dieses Satzes ist bereits bewiesen. Ist A ein Operator einfacher Struktur, so besitzt er n linear unabhängige Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden, und in bezug auf diese Basis entspricht dem Operator A die Diagonalmatrix $A^{(1)}$, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte des Operators A stehen. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V bezüglich der dem Operator A die Diagonalmatrix $A^{(1)}$ entspricht, so gilt

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

und die Diagonalelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind Eigenwerte des Operators A, die Basisvektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind n linear unabhängige Eigenvektoren, und nach Satz XI ist A ein Operator einfacher Struktur.

---

[1]) Wir bemerken, daß diese Normalform bis auf die Reihenfolge der Diagonalelemente eindeutig bestimmt ist. Wenn wir o. B. d. A. annehmen, daß $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ gewählt sei, so sind wir berechtigt, von *der* Normalform des Operators einfacher Struktur A zu sprechen.

Bisher haben wir nicht vorausgesetzt, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des Operators A voneinander verschieden sind. Wir beweisen jetzt den Satz:

XIII. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte des linearen Operators A und ist $\boldsymbol{x}_i$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ($i = 1, \ldots, m$), so sind die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ linear unabhängig.*

Zum Beweis wenden wir den Operator A auf die Gleichung

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$$

an und erhalten $(\alpha_1 \cdot \lambda_1) \boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 \cdot \lambda_2) \boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha_m \cdot \lambda_m) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$. Subtrahieren wir hiervon die Gleichung $(\alpha_1 \cdot \lambda_1) \boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2 \cdot \lambda_1) \boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha_m \cdot \lambda_1) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$, so folgt

$$(\alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)) \boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha_m \cdot (\lambda_m - \lambda_1)) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}.$$

Auf diese Gleichung wenden wir wiederum den Operator A an und subtrahieren von dem Ergebnis die Gleichung $(\alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \lambda_2) \boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha_m \cdot (\lambda_m - \lambda_1) \cdot \lambda_2) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}$. Dann gilt

$$(\alpha_3 \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)) \boldsymbol{x}_3 + \cdots + (\alpha_m \cdot (\lambda_m - \lambda_1) \cdot (\lambda_m - \lambda_2)) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt nach $m - 1$ Schritten

$$(\alpha_m \cdot (\lambda_m - \lambda_1) \cdot (\lambda_m - \lambda_2) \cdots (\lambda_m - \lambda_{m-1})) \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{o}.$$

Da die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ als verschieden vorausgesetzt waren, folgt $\alpha_m = 0$. Entsprechend beweist man, daß $\alpha_{m-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$ ist.

Wir bemerken, daß ein linearer Operator A auf einem n-dimensionalen Vektorraum V nicht mehr als n verschiedene Eigenwerte besitzen kann.

Aus den Sätzen XI und XIII folgt der Satz:

XIV. *Besitzt der lineare Operator A auf dem n-dimensionalen Vektorraum V n verschiedene Eigenwerte, so ist A ein Operator einfacher Struktur.*

Die Menge der verschiedenen Eigenwerte eines linearen Operators heißt das *Spektrum des linearen Operators.*

Wegen der großen Bedeutung der Begriffe Eigenwert und Eigenvektor für die Strukturtheorie der linearen Operatoren unterziehen wir die Gleichung (11) einer eingehenderen Betrachtung.

Ist $\boldsymbol{E}$ wie üblich der Einsoperator, so ist $\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{E} \boldsymbol{x}$, und durch eine einfache Umformung erhält die Gleichung (11) die Gestalt

$$(A - \lambda E) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}. \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der folgende Satz ablesen:

XV. *Die reelle Zahl λ ist dann und nur dann ein Eigenwert des linearen Operators A, wenn die Vektorgleichung* (12) *eine nichttriviale Lösung besitzt.*

Die nichttrivialen Lösungen der Vektorgleichung (12) *sind die Eigenvektoren zum Eigenwert* λ.

Aus den Ergebnissen über die Lösbarkeit und die Lösungsmenge homogener linearer Vektorgleichungen (§ 10, Nr. 4, Satz VIII) folgt:

XVI. *Die reelle Zahl* λ *ist dann und nur dann ein Eigenwert des linearen Operators* A, *wenn der Operator* $A - \lambda E$ *nicht regulär ist.*

Die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ *und der Nullvektor bilden einen linearen Teilraum* $W(\lambda)$, *der gleich dem Kern des Operators* $A - \lambda E$ *ist:*

$$W(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1} (\{o\}).$$

Der lineare Teilraum $W(\lambda)$, der aus den zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren und dem Nullvektor besteht, heißt der *Eigenraum zum Eigenwert* λ.

Die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert lassen sich nach den letzten Sätzen als nichttriviale Lösungen einer homogenen linearen Vektorgleichung berechnen.

9⁰. Als Beispiel betrachten wir einen zweidimensionalen Vektorraum V. Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ eine Basis von V, so wird durch die Matrix

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$$

ein linearer Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ definiert. Jedem eindimensionalen bezüglich A invarianten Teilraum $W = L(\{x\})$ entspricht ein Eigenwert von A. Dem Operator $A - \lambda E$ ist die Matrix

$$A - \lambda E = \begin{Vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \mu \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{Vmatrix}$$

zugeordnet, die für alle $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$ regulär ist.

Der Operator A *besitzt die Eigenwerte* λ_1 *und* λ_2.

Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *so besitzt* A *zwei verschiedene Eigenwerte und ist ein Operator einfacher Struktur.* Der Vektor $x_1 \in V$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1, und $W_1 = L(\{x_1\})$ ist der zugehörige Eigenraum. Einen Eigenvektor $y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ zum Eigenwert λ_2 erhalten wir aus der Gleichung $Ay_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = (\alpha_1 \cdot \lambda_1 + \alpha_2 \cdot \mu)\, x_1 + (\alpha_2 \cdot \lambda_2)\, x_2 = (\alpha_1 \cdot \lambda_2)\, x_1 + (\alpha_2 \cdot \lambda_2)\, x_2 = \lambda_2 y_2$ in der Form $y_2 = \dfrac{\mu}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1 + x_2$. Die Vektoren x_1, y_2 sind linear unabhängig und bilden eine Basis von V.

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, *so besitzt* A *nur einen Eigenwert.* Für die Dimension des zugehörigen Eigenraumes $W(\lambda_1) = (A - \lambda_1 E)^{-1}\{o\}$ erhalten wir $\dim W(\lambda_1) = d(A - \lambda_1 E)$, und $W(\lambda_1)$ ist eindimensional oder zweidimensional, je nachdem, ob $\mu \neq 0$ oder $\mu = 0$ ist.

Für $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = 0$ *ist* A *eine Diagonalmatrix und folglich* A *ein Operator einfacher Struktur* mit den linear unabhängigen Eigenvektoren x_1 und x_2.

Für $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu \neq 0$ *ist* A *kein Operator einfacher Struktur.*

Andernfalls müßte A zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu dem einzigen Eigenwert λ_1 besitzen, was $\dim W(\lambda_1) = 1$ widerspricht. Der Vektor x_1 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1, und der Eigenraum $W(\lambda_1) = W_1 = L(\{x_1\})$ ist der einzige bezüglich A invariante eindimensionale Teilraum von V.

7.* PROJEKTIONSOPERATOREN

Im letzten Abschnitt dieses Paragraphen wollen wir auf eine Klasse linearer Operatoren eingehen, die man *Projektionsoperatoren* nennt und die aufs engste mit der Zerlegung eines linearen Vektorraumes in die direkte Summe zweier Teilräume zusammenhängen.

Es sei V ein linearer Vektorraum, von dem wir annehmen, daß wir ihn als die direkte Summe zweier linearer Teilräume V_1 und V_2 darstellen können: $V = V_1 \dotplus V_2$. Nach § 6, Nr. 4 bestimmt jeder Vektor $x \in V$ einen eindeutig bestimmten Vektor $x_1 \in V_1$ und einen ebenfalls eindeutig bestimmten Vektor $x_2 \in V_2$, so daß

$$x = x_1 + x_2 \quad (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2) \tag{13}$$

ist. Wir betrachten die durch

$$P_1 x = x_1 \quad \text{und} \quad P_2 x = x_2 \tag{14}$$

definierten Abbildungen von V auf V_1 bzw. V_2. Die Bilder P_1x, P_2x haben wir in § 6, Nr. 4 *Projektionen* des Vektors x auf V_1 bzw. V_2 genannt. Ist x ein Vektor aus V_1, so ist $x_1 = x$ und $x_2 = o$; ist x ein Vektor aus V_2, so ist entsprechend $x_1 = o$ und $x_2 = x$. Infolgedessen gilt

$$\left.\begin{aligned} P_1x = x, P_2x = o \quad &\text{für jeden Vektor} \quad x \in V_1, \\ P_1x = o, P_2x = x \quad &\text{für jeden Vektor} \quad x \in V_2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ist umgekehrt $P_1x = x$, so ist $x_1 = x$ und folglich $x_2 = o$, und entsprechend folgen aus $P_2x = x$ die Gleichungen $x_2 = x$ und $x_1 = o$. Wir wollen nachweisen, daß P_1 und P_2 lineare Operatoren auf dem Vektorraum V sind.

Es seien $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ zwei Vektoren aus V, und dabei sei $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$. Dann ist $P_1x = x_1$, $P_1y = y_1$ und $P_2x = x_2$, $P_2y = y_2$. Ferner ist $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, und es gilt $(x_1 + y_1) \in V_1$, $(x_2 + y_2) \in V_2$. Folglich ist $P_1(x + y) = x_1 + y_1 = P_1x + P_1y$ und $P_2(x + y) = x_2 + y_2 = P_2x + P_2y$.

Betrachten wir den Vektor $\alpha x \in V$ mit $\alpha \in R$, so gilt $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$, und es ist $\alpha x_1 \in V_1$, $\alpha x_2 \in V_2$. Wir erhalten $P_1(\alpha x) = \alpha x_1 = \alpha P_1 x$ und $P_2(\alpha x) = \alpha x_2 = \alpha P_2 x$. Damit haben wir bewiesen, daß P_1 und P_2 lineare Abbildungen von V in sich, also lineare Operatoren auf dem linearen Vektorraum V sind.

Die linearen Operatoren P_1 und P_2 heißen *Projektionsoperatoren des linearen Vektorraumes V auf die linearen Teilräume V_1 und V_2.*

Ist x ein beliebiger Vektor aus V und wenden wir die linearen Operatoren P_1 bzw. P_2 auf den Vektor $P_1x \in V_1$ bzw. $P_2x \in V_2$ an, so folgt aus (15)

$$P_1^2 x = P_1(P_1x) = P_1x, \qquad P_2^2 x = P_2(P_2x) = P_2x$$

und

$$(P_1P_2)\,x = P_1(P_2x) = o, \quad (P_2P_1)\,x = P_2(P_1x) = o.$$

Aus (13) und (14) erhalten wir überdies

$$x = P_1x + P_2x = (P_1 + P_2)\,x = Ex.$$

Da diese Gleichungen für jeden Vektor $x \in V$ gelten, können wir unsere Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen:

XVII. *Jeder Zerlegung des linearen Vektorraumes V in die direkte Summe zweier Teilräume V_1 und V_2 entspricht ein Paar von Projektionsoperatoren P_1 und P_2 von V auf V_1 und V_2, für die die folgenden Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} &P_1^2 = P_1,\ P_2^2 = P_2,\ P_1P_2 = P_2P_1 = O, \\ &P_1 + P_2 = E. \end{aligned} \tag{16}$$

Wir betrachten umgekehrt einen linearen Operator $\boldsymbol{P}$ auf dem linearen Vektorraum V, der der Gleichung

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} \tag{17}$$

genügt. Das Bild $\boldsymbol{P}V = W$ des linearen Operators $\boldsymbol{P}$ ist ein linearer Teilraum von V. Bezeichnet $\boldsymbol{E}$ den Einsoperator, so ist $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}$ wiederum ein linearer Operator auf dem Vektorraum V, und wir zeigen, daß auch $\boldsymbol{P}'$ der Gleichung (17) genügt. Da wir mit den linearen Operatoren nach Satz I distributiv rechnen können, gilt

$$\boldsymbol{P}'^2 = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{P}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^2.$$

Es ist $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}$, also

$$\boldsymbol{P}'^2 = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'.$$

$\boldsymbol{P}'$ genügt der Gleichung (17). Nach Definition des Operators $\boldsymbol{P}'$ gilt $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{E}$. Ferner erhalten wir

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}$$

und

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}.$$

Die Operatoren $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P}'$ genügen den für die Projektionsoperatoren $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{P}_2$ bewiesenen Gleichungen (16), und es gilt:

XVIII. *Ist V ein linearer Vektorraum und genügt der Operator $\boldsymbol{P}$ der Gleichung* (17), *so genügt der Operator $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}$ ebenfalls dieser Gleichung, und der Vektorraum V läßt sich als die direkte Summe der linearen Teilräume $W = \boldsymbol{P}V$ und $W' = \boldsymbol{P}'V$ schreiben. Die Operatoren $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P}'$ sind die Projektionsoperatoren des Vektorraumes V auf die linearen Teilräume W und W'.*

Zum Beweis müssen wir noch zeigen, daß $V = W + W'$ und $W \cap W' = \{\boldsymbol{o}\}$ ist. Es sei $\boldsymbol{x} \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}')\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}'\boldsymbol{x}$, und es ist $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}V = W$ und $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}'V = W'$. Daraus folgt $V = W + W'$. Es sei $\boldsymbol{x} \in W \cap W'$; dann ist $\boldsymbol{x} \in W = \boldsymbol{P}V$, und es gibt einen Vektor $\boldsymbol{y} \in V$, so daß $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ ist. Entsprechend ist $\boldsymbol{x} \in W' = \boldsymbol{P}'V$, und es gibt einen Vektor $\boldsymbol{y}' \in V$, so daß $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{y}'$ ist. Daraus folgt

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}')\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{o}.$$

Es ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, und der Satz XVIII ist bewiesen.

10°. Es sei $\boldsymbol{P}_1$ der in Beispiel 4° definierte lineare Operator auf dem Vektorraum $R(\mathfrak{M})$ mit $\boldsymbol{P}_1 R(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_2)$. Es gilt $\boldsymbol{P}_1^2 = \boldsymbol{P}_1$, und der Operator $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_1$ ist durch

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$$

und

$$\boldsymbol{x}_2(a) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(a) & \text{für} \quad a \in \mathfrak{M}_2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Ferner ist $\boldsymbol{P}_2 R(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ und

$$R(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \dotplus R(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_2).$$

Der Leser veranschauliche sich die Verhältnisse für eine endliche Menge $\mathfrak{M}$.*

8. AUFGABEN

1. Für einen regulären linearen Operator $\boldsymbol{A}$ auf dem linearen Vektorraum V beweise man die Gleichungen $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$, $(\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{k \cdot l}$. Für eine reguläre quadratische Matrix A beweise man die Gleichungen $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{k \cdot l}$. Dabei seien k und l beliebige ganze Zahlen (die auch negativ sein können!).

2. Man berechne die Inverse einer regulären dreireihigen quadratischen Matrix.

3. Eine n-reihige quadratische Matrix ist dann und nur dann regulär, wenn sie eine Inverse besitzt.

4. Der Leser vergleiche § 9, Nr. 7, Satz XIII und § 11, Nr. 5, Satz IX und bestimme den Zusammenhang zwischen den Matrizen C', C aus § 9, Nr. 7, Satz XIII mit den Matrizen B', B aus § 11, Nr. 5, Satz IX.

5. Man betrachte die durch

$$Dp = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 t + \cdots + (n-1) \cdot \alpha_{n-1} t^{n-2}$$

definierte lineare Abbildung von P_n auf P_{n-1}. Man bestimme Basen $\mathfrak{B}_2$ bzw. $\mathfrak{B}_2'$ von P_n bzw. P_{n-1}, in bezug auf die die Matrix $D^{(2)}$ die Normalform besitzt. Man berechne Matrizen $\|\beta_{ij}\|$ und $\|\beta'_{ij}\|$, die die Basen $\mathfrak{B}_1 = \{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$ bzw. $\mathfrak{B}_1' = \{1, t, \ldots, t^{n-2}\}$ in die Basen $\mathfrak{B}_2$ bzw. $\mathfrak{B}_2'$ überführen.

Man betrachte die obige Abbildung D als linearen Operator auf dem Vektorraum P_n und berechne die zugehörige Matrix in bezug auf die oben konstruierte Basis $\mathfrak{B}_2$ von P_n.

6.* Eine n-reihige quadratische Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ heißt eine *Matrix einfacher Struktur*, wenn es einen n-dimensionalen Vektorraum V, eine Basis $\mathfrak{B}$ von V und einen Operator einfacher Struktur $A \in \mathscr{A}(V)$ gibt, so daß $A = \Phi_{\mathfrak{B}}(A)$ ist. Man zeige:

a) Ist V' ein n-dimensionaler Vektorraum, $\mathfrak{B}' = \{x_1', \ldots, x_n'\}$ eine Basis von V' und wird der Operator $A' \in \mathscr{A}(V')$ durch die Gleichungen

$$A'x_i' = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'}' \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert, so ist A' dann und nur dann ein Operator einfacher Struktur, wenn $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine Matrix einfacher Struktur ist.

b) Die n-reihige quadratische Matrix A ist dann und nur dann eine Matrix einfacher Struktur, wenn es eine reguläre n-reihige quadratische Matrix B gibt, so daß

$$A^{(1)} = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

eine Diagonalmatrix ist.

7.* Das Produkt zweier Projektionsoperatoren P_1, P_2 ist dann und nur dann ein Projektionsoperator $P = P_1 P_2$, wenn die beiden Projektionsoperatoren vertauschbar sind: $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

8.* Die Summe $P = P_1 + \cdots + P_m$ der Projektionsoperatoren $P_1, \ldots, P_m$ ist dann und nur dann ein Projektionsoperator, wenn $P_i P_j = O$ ist für $i \neq j$. Dann gilt

$$PV = P_1 V \dotplus \cdots \dotplus P_m V.$$

§ 12. DER DUALE VEKTORRAUM

1. EINLEITUNG

Eine wichtige Klasse linearer Abbildungen sind die linearen Abbildungen eines linearen Vektorraumes V in den Vektorraum R der reellen Zahlen. Diese linearen Abbildungen heißen lineare Funktionale auf dem Vektorraum V. Die Untersuchung der linearen Funktionale auf dem Vektorraum V eröffnet neue Möglichkeiten zur Beschreibung der linearen Mannigfaltigkeiten von V und damit zur Interpretation linearer Gleichungssysteme.

Die Bedeutung der linearen Funktionale im Fall eines unendlichdimensionalen Vektorraumes wird durch die Bemerkung charakterisiert, daß das bestimmte Integral ein lineares Funktional auf dem Vektorraum der stetigen oder allgemeiner auf dem Vektorraum der integrierbaren reellen Funktionen ist. Die verschiedenen Verallgemeinerungen des Riemannschen Integralbegriffes, die in der Analysis eine Rolle spielen, gehen von dieser Auffassung des Integrals als lineares Funktional auf einem linearen Vektorraum von Funktionen aus.

2. LINEARE FUNKTIONALE; DER DUALE VEKTORRAUM; DAS KLAMMERSYMBOL

Ein *lineares Funktional* y^* auf einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung von V in den Vektorraum R der reellen Zahlen.[1] Der Vektorraum $\mathscr{A}(V, R)$ der linearen Funktionale auf dem Vektorraum V heißt der zu V *duale Vektorraum* und wird mit V^* bezeichnet. Die Elemente von V^* werden häufig auch *duale Vektoren* oder *Kovektoren* genannt.

1°. Ist R^n der lineare Vektorraum der n-tupel von reellen Zahlen, so erhalten wir n lineare Funktionale $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ durch

$$\delta_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieses Beispiel läßt sich für den linearen Vektorraum $R(\mathfrak{M})$ der reellwertigen Funktionen auf der Menge $\mathfrak{M}$ verallgemeinern. Ist $a \in \mathfrak{M}$, so definieren wir ein lineares Funktional δ_a auf $R(\mathfrak{M})$ durch die Gleichung

$$\delta_a x = x(a).$$

2°.* Es sei $D_\infty(\alpha_0, \beta_0)$ der lineare Vektorraum der auf dem Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definierten und dort beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen. Ist $\alpha_0 \leqq 0 \leqq \beta_0$, so definieren wir ein lineares Funktional δ durch

$$\delta f(t) = f(0).$$

Das Funktional δ heißt das ***Diracsche δ-Funktional*** oder auch die ***Diracsche δ-Funktion*** und ist für viele physikalische Anwendungen, z. B. in der Quantenmechanik, von großer Bedeutung.*

Wir untersuchen die Beziehungen zwischen einem linearen Vektorraum V und seinem dualen Vektorraum V^* und betrachten dazu einen festen Vektor $x \in V$. Für jedes $y^* \in V^*$ ist $y^*(x)$ eine reelle Zahl. Der Vektor $x \in V$ definiert also eine Abbildung des Vektorraumes V^* in die reellen Zahlen R. Wir bezeichnen diese Abbildung mit x^{**}; sie wird durch die Gleichung

$$x^{**}(y^*) \underset{\text{Def.}}{=} y^*(x) \tag{1}$$

---

[1]) Die linearen Funktionale auf dem Vektorraum V werden auch *Linearformen* genannt. Vgl. dazu § 13, Nr. 3.

definiert. Die Abbildung x^{**} ist eine lineare Abbildung von V^* in den Vektorraum R der reellen Zahlen und damit ein Element des dualen Vektorraumes V^{**} des Vektorraumes V^*. Es ist nämlich $x^{**}(\alpha y^*) = (\alpha y^*)(x) = \alpha \cdot y^*(x) = \alpha \cdot x^{**}(y^*)$, und für $y_1^*, y_2^* \in V^*$ gilt $x^{**}(y_1^* + y_2^*) = (y_1^* + y_2^*)(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = x^{**}(y_1^*) + x^{**}(y_2^*)$.

I. *Ist V ein linearer Vektorraum, V^* der duale Vektorraum von V und V^{**} der duale Vektorraum von V^*, so definiert die Gleichung*

$$\Phi(x) \underset{\text{Def.}}{=} x^{**} \tag{2}$$

eine lineare Abbildung von V in V^{**}. Dabei wird das lineare Funktional x^{**} auf dem Vektorraum V^* durch die Gleichung (1) *bestimmt.*

Für die Abbildung Φ ist $\Phi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^{**}$, und für jedes $y^* \in V^*$ gilt

$$(x_1 + x_2)^{**}(y^*) = y^*(x_1 + x_2) = y^*(x_1) + y^*(x_2) = x_1^{**}(y^*) + x_2^{**}(y^*)$$
$$= (x_1^{**} + x_2^{**})(y^*)$$

oder

$$(x_1 + x_2)^{**} = x_1^{**} + x_2^{**} = \Phi(x_1) + \Phi(x_2).$$

Betrachten wir $\Phi(\alpha x) = (\alpha x)^{**}$, so gilt entsprechend

$$(\alpha x)^{**}(y^*) = y^*(\alpha x) = \alpha \cdot y^*(x) = \alpha \cdot x^{**}(y^*) = (\alpha x^{**})(y^*) \text{ für jedes } y^* \in V^*,$$

und damit ist $(\alpha x)^{**} = \alpha x^{**} = \alpha\Phi(x)$. Die Abbildung Φ ist eine lineare Abbildung von V in V^{**} und wird als die *kanonische lineare Abbildung von V in V^{**}* bezeichnet.

II. *Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V ist die kanonische Abbildung Φ von V in V^{**} eine reguläre lineare Abbildung von V auf V^{**}.*
Φ ist ein Isomorphismus von V auf V^{**}.

Den Beweis erhalten wir aus dem folgenden Satz

III. *Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Vektorraumes V, so gibt es n lineare Funktionale $x_1^*, \ldots, x_n^* \in V^*$, für die*

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

ist (δ_{ij} bezeichnet das Kronecker-Symbol). *Die Kovektoren $x_1^*, \ldots, x_n^*$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ von V^*.*

Die Basis $\mathfrak{B}^*$ heißt die *Kobasis* oder die *duale Basis zur Basis* $\mathfrak{B}$.

Wir beweisen zunächst den Satz III: Da die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V bilden, wird für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ durch die Gleichungen (3) eine lineare Abbildung von V in R definiert. Für $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ gilt $x_i^*(x) = \xi_i$. Da nach § 9, Nr. 3, Satz VI die Gleichung $\dim V^* = \dim \mathscr{A}(V, R) = n \cdot 1 = n$ gilt, bleibt nur die lineare Unabhängigkeit der so definierten Kovektoren $x_1^*, \ldots, x_n^*$ zu beweisen. Es sei

$$\alpha_1 x_1^* + \cdots + \alpha_n x_n^* = o^*.$$

Für den Basisvektor x_i $(i = 1, \ldots, n)$ gilt dann

$$(\alpha_1 x_1^* + \cdots + \alpha_n x_n^*)(x_i) = \alpha_i \cdot x_i^*(x_i) = \alpha_i = o^*(x_i) = 0,$$

und daraus folgt die lineare Unabhängigkeit der Kovektoren $x_1^*, \ldots, x_n^*$.

Zum Beweis von Satz II sei $x \neq o$ ein Vektor aus V. Wir ergänzen $x_1 = x$ zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{x = x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von V. Ist $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die Kobasis zur Basis $\mathfrak{B}$, so gilt $x^{**}(x_1^*) = x_1^*(x) = x_1^*(x_1) = 1$, und folglich ist $x^{**} = \Phi(x) \neq o^{**}$. Dann ist $\Phi^{-1}(\{o^{**}\}) = \{o\}$, und die Abbildung Φ ist regulär. Für die reguläre Abbildung Φ gilt $\dim \Phi V = \dim V = n$. Andererseits ist ΦV ein linearer Teilraum des linearen Vektorraumes V^{**}, der als dualer Vektorraum des n-dimensionalen Vektorraumes V^* ebenfalls die Dimension n besitzt. Daraus folgt $\Phi V = V^{**}$, und Satz II ist bewiesen.

Es ist zweckmäßig, die Vektoren $x \in V$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit den Vektoren $x^{**} \in V^{**}$ zu identifizieren. Die Vektoren $x \in V$ fassen wir gleichzeitig als lineare Funktionale $x(y^*) = y^*(x)$ auf dem dualen Vektorraum V^* auf. Wir sagen:

Der duale Vektorraum des dualen Vektorraumes eines endlichdimensionalen Vektorraumes ist der ursprüngliche Vektorraum.[1])

Um die Symmetrie in den Beziehungen zwischen den Vektorräumen V und V^* deutlicher hervortreten zu lassen, definieren wir eine reellwertige Funktion auf der Menge der Paare (x, y^*) mit $x \in V$, $y^* \in V^*$, die wir durch eckige Klammern $\langle\, ,\, \rangle$ bezeichnen und das *Klammersymbol* nennen:

$$\langle x, y^* \rangle \underset{\text{Def.}}{=} y^*(x) = x(y^*) = \langle y^*, x \rangle. \tag{4}$$

Dabei ist $y^* \in V^*$ ein lineares Funktional auf dem Vektorraum V und $x \in V$ ein lineares Funktional auf dem Vektorraum V^*. Sind $x, x_1, x_2 \in V$, $y^*, y_1^*, y_2^* \in V^*$ und $\alpha \in R$, so gelten für das Klammersymbol folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\langle x_1 + x_2, y^* \rangle &= \langle x_1, y^* \rangle + \langle x_2, y^* \rangle, \\
\langle \alpha x, y^* \rangle &= \alpha \cdot \langle x, y^* \rangle, \\
\langle x, y_1^* + y_2^* \rangle &= \langle x, y_1^* \rangle + \langle x, y_2^* \rangle, \\
\langle x, \alpha y^* \rangle &= \alpha \cdot \langle x, y^* \rangle.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir sagen: *Das Klammersymbol ist in jedem Argument linear.*

---

[1]) Die genannte Identifikation kann stets vorgenommen werden, wenn die kanonische Abbildung Φ von V in V^{**} ein Isomorphismus von V auf V^{**} ist. Derartige Vektorräume heißen *reflexiv*. Für sie gelten alle im folgenden bewiesenen Sätze, in denen die Endlichkeit der Dimension nicht direkt eine Rolle spielt.

Die Linearität des Klammersymbols in jedem Argument ermöglicht seine Berechnung. Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis, so gilt für den Vektor $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n \in V$

$$\langle x, x_i^* \rangle = \langle \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n, x_i^* \rangle = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

und für den Kovektor $y^* = \eta_1 x_1^* + \cdots + \eta_n x_n^* \in V^*$

$$\langle x_i, y^* \rangle = \langle x_i, \eta_1 x_1^* + \cdots + \eta_n x_n^* \rangle = \eta_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6*}$$

Auf diese Weise lassen sich zunächst die Koordinaten des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ durch das Klammersymbol für den Vektor x und die Elemente der Kobasis $\mathfrak{B}^*$ ausdrücken. In der Gleichung (6*) werden entsprechend die Koordinaten des Kovektors y^* in bezug auf die Kobasis $\mathfrak{B}^*$ durch die Werte des Klammersymbols für die Elemente der Basis $\mathfrak{B}$ und den Kovektor y^* ausgedrückt. Für den Wert des Klammersymbols $\langle x, y^* \rangle$ ergibt sich

$$\langle x, y^* \rangle = \xi_1 \cdot \eta_1 + \cdots + \xi_n \cdot \eta_n. \tag{7}$$

3°. Wir betrachten abermals den linearen Vektorraum R^n. Ist $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ seine kanonische Basis, so bilden die in 1° erklärten linearen Funktionale $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ die zu $\mathfrak{B}$ gehörende Kobasis. Nach Definition von δ_i und e_j ist

$$\delta_i(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$\langle e_j, \delta_i \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir weisen den Leser darauf hin, daß eine Basis $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und eine Basis $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ von V^* dann und nur dann in der Beziehung Basis—duale Basis stehen, wenn $\langle x_i, x_j^* \rangle = \delta_{ij}\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Fassen wir V als den zu V^* dualen Vektorraum auf, so ist $\mathfrak{B}$ die duale Basis zur Basis $\mathfrak{B}^*$.

3. ANNULLATOREN UND ANNULLATORRÄUME; * BESCHREIBUNG LINEARER TEILRÄUME UND MANNIGFALTIGKEITEN DURCH GLEICHUNGEN*

Nachdem in Nr. 2 die Beziehungen zwischen einem Vektorraum und seinem dualen Vektorraum allgemein untersucht wurden, sollen jetzt die Beziehungen zwischen Teilräumen und linearen Mannigfaltigkeiten in einem Vektorraum und seinem dualen Vektorraum analysiert werden.

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum[1]) und x ein Vektor aus V. Ein Kovektor $y^* \in V^*$ heißt ein *Annullator des Vektors* $x \in V$, wenn $\langle x, y^* \rangle = 0$ ist. Entsprechend heißt auch x ein Annullator von y^*.

[1]) Beziehungsweise ein reflexiver Vektorraum.

Ein Kovektor y^* heißt ein *Annullator einer Menge* $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V, wenn er ein Annullator eines jeden Vektors aus $\mathfrak{A}$ ist. Bezeichnen wir die Menge aller Annullatoren von $\mathfrak{A}$ mit $N^*(\mathfrak{A})$, so ist $N^*(\mathfrak{A}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{A}} N^*(\{x\})$. Die Menge $N^*(\{x\})$ der Annullatoren eines Vektors $x \in V$ ist das vollständige Urbild $x^{-1}(\{0\})$ der reellen Zahl 0 bei der linearen Abbildung x von V^* in R und folglich ein linearer Teilraum von V^*. Dann ist auch $N^*(\mathfrak{A})$ als Durchschnitt von linearen Teilräumen ein linearer Teilraum von $\mathfrak{A}$.

IV. *Die Annullatoren einer Menge* $\mathfrak{A}$ *von Vektoren aus* V *bilden einen linearen Teilraum* $N^*(\mathfrak{A})$ *von* V^*.

Die Annullatoren einer Menge $\mathfrak{A}^*$ *von Kovektoren aus* V^* *bilden einen linearen Teilraum* $N(\mathfrak{A}^*)$ *von* V.

Der zweite Teil von Satz IV ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil, wenn man berücksichtigt, daß V der duale Vektorraum von V^* ist, und die Rollen von V und V^* vertauscht.

Die linearen Teilräume $N^*(\mathfrak{A})$ bzw. $N(\mathfrak{A}^*)$ werden *Annullatorräume* der Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V bzw. der Menge $\mathfrak{A}^*$ von Kovektoren aus V^* genannt.

Wir betrachten nun den Annullatorraum $N(\mathfrak{A}^*)$ einer Menge $\mathfrak{A}^*$ von Kovektoren, die selbst Annullatorraum einer Menge $\mathfrak{A}$ von Vektoren aus V ist: $\mathfrak{A}^* = N^*(\mathfrak{A})$. Dann gilt für die Vektoren $x \in \mathfrak{A}$

$$\langle x, y^* \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad y^* \in N^*(\mathfrak{A}). \tag{8}$$

Die Menge $N(N^*(\mathfrak{A}))$ besteht aus allen Vektoren $x \in V$, für die die Beziehung (8) gilt. Folglich gehören die Vektoren $x \in \mathfrak{A}$ zur Menge $N(N^*(\mathfrak{A}))$, und es ist $\mathfrak{A} \subseteq N(N^*(\mathfrak{A}))$. Beachten wir, daß $N(N^*(\mathfrak{A}))$ ein linearer Teilraum von V ist, so folgt sogar $L(\mathfrak{A}) \subseteq N(N^*(\mathfrak{A}))$. Wir beweisen den folgenden Satz:

V. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Menge von Vektoren aus* V, $N^*(\mathfrak{A})$ *der Annullatorraum von* $\mathfrak{A}$ *und* $N(N^*(\mathfrak{A}))$ *der Annullatorraum der Menge* $N^*(\mathfrak{A})$ *von Kovektoren aus* V^*, *so gilt*

$$N(N^*(\mathfrak{A})) = L(\mathfrak{A}).$$

Ist $\mathfrak{A}^*$ *eine Menge von Kovektoren aus* V^*, $N(\mathfrak{A}^*)$ *der Annullatorraum von* $\mathfrak{A}^*$ *und* $N^*(N(\mathfrak{A}^*))$ *der Annullatorraum der Menge* $N(\mathfrak{A}^*)$ *von Vektoren aus* V, *so gilt*

$$N^*(N(\mathfrak{A}^*)) = L(\mathfrak{A}^*).$$ [1]

Ferner ist

$$\dim L(\mathfrak{A}) + \dim N^*(\mathfrak{A}) = \dim V, \tag{9}$$

und

$$\dim L(\mathfrak{A}^*) + \dim N(\mathfrak{A}^*) = \dim V^*. \tag{9*}$$

---

[1] Der interessierte Leser beweise die Gleichungen $N(N^*(\mathfrak{A})) = L(\mathfrak{A})$ und $N^*(N(\mathfrak{A}^*)) = L(\mathfrak{A}^*)$ für einen reflexiven Vektorraum V.

Die zweite Behauptung dieses Satzes sowie die zweite der Dimensionsgleichungen folgen unmittelbar aus der ersten durch Vertauschung von V und V^*. Es genügt also, die erste Aussage sowie die Gleichung (9) zu beweisen.

In der Menge $\mathfrak{A}$ wählen wir ein System $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängiger Vektoren, so daß jeder Vektor aus $\mathfrak{A}$ von $x_1, \ldots, x_m$ linear abhängig ist. Dann ist $m = \dim L(\mathfrak{A})$. Die Vektoren $x_1, \ldots, x_m$ ergänzen wir zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und bezeichnen mit $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die zugehörige Kobasis. Ist $y^* \in V^*$ und $y^* = \beta_1 x_1^* + \cdots + \beta_n x_n^*$, so ist $\langle x_i, y^* \rangle = \beta_i$, und wenn $y^* \in N^*(\mathfrak{A})$ ist, so muß $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$ sein. Ist umgekehrt $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$, so gilt für jeden Vektor $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in V$ die Gleichung

$$\langle x, y^* \rangle = \alpha_{m+1} \cdot \beta_{m+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \beta_n .$$

Ist $x \in \mathfrak{A}$, so ist $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, und folglich gilt $\langle x, y^* \rangle = 0$. Damit ist $N^*(\mathfrak{A}) = L(\{x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*\})$, und die Gleichung (9) ist bewiesen. Dann gilt auch (9*); setzt man in ihr $\mathfrak{A}^* = N^*(\mathfrak{A})$, so ist $L(\mathfrak{A}^*) = N^*(\mathfrak{A})$, und die Gleichung (9*) läßt sich in der Form $\dim N(N^*(\mathfrak{A})) = \dim V^* - \dim N^*(\mathfrak{A})$ schreiben. Da $\dim V^* = \dim V$ ist, folgt hieraus und aus der Gleichung (9) $\dim N(N^*(\mathfrak{A})) = \dim L(\mathfrak{A})$ und damit die Behauptung.

Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei Mengen von Vektoren aus V und ist $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}_2$, so gilt offenbar $N^*(\mathfrak{A}_1) \supseteqq N^*(\mathfrak{A}_2)$. Ist nämlich $y^* \in N^*(\mathfrak{A}_2)$, so ist $\langle x, y^* \rangle = 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}_2$, also auch für alle $x \in \mathfrak{A}_1$.

*Es sei W ein m-dimensionaler Teilraum von V. Der Annullatorraum $N^*(W)$ besitzt die Dimension $m^* = n - m$, und es sei $\mathfrak{B}_0^* = \{y_1^*, \ldots, y_{m^*}^*\}$ eine Basis von $N^*(W)$. Dann gilt $N(\mathfrak{B}_0^*) \supseteqq N(N^*(W)) = W$. Andererseits ist $\dim N(\mathfrak{B}_0^*) + \dim L(\mathfrak{B}_0^*) = n$, also $\dim N(\mathfrak{B}_0^*) = m$ und folglich $W = N(\mathfrak{B}_0^*)$.

Der lineare Teilraum W besteht aus allen und nur den Vektoren $x \in V$, für die

$$\langle x, y_i^* \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*)$$

ist. Folglich gilt

$$W = \bigcap_{i=1}^{m^*} N(\{y_i^*\}),$$

und $N(\{y_i^*\}) = y_i^{*-1}(\{0\})$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Teilraum von V.

VI. *Jeder m-dimensionale lineare Teilraum W von V ist der Durchschnitt von $n - m$ linearen Teilräumen der Dimension $n - 1$ und läßt sich durch $n - m$ Gleichungen der Form*

$$\langle x, y_i^* \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*) \tag{10°}$$

beschreiben.

Ist $M = x_0 + W$ eine m-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit in V, so betrachten wir die m^* Kovektoren $y_1^*, \ldots, y_{m^*}^* \in N^*(W)$ und erhalten für jedes $x = x_0 + z \in M$, $z \in W$

$$\langle x, y_i^* \rangle = \langle x_0 + z, y_i^* \rangle = \langle x_0, y_i^* \rangle + \langle z, y_i^* \rangle = \langle x_0, y_i^* \rangle = \beta_i$$

für $i = 1, 2, \ldots, m^*$. Ist umgekehrt für einen Vektor $x \in V$

$$\langle x, y_i^* \rangle = \beta_i = \langle x_0, y_i^* \rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*),$$

so folgt $\langle x, y_i^* \rangle - \langle x_0, y_i^* \rangle = \langle x - x_0, y_i^* \rangle = 0$ oder $x - x_0 \in W$ und damit $x \in M$.

Die lineare Mannigfaltigkeit $M = x_0 + W$ besteht aus allen und nur den Vektoren $x \in V$, für die

$$\langle x, y_i^* \rangle = \langle x_0, y_i^* \rangle = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*)$$

ist. Folglich gilt

$$M = \bigcap_{i=1}^{m^*} [x_0 + N(\{y_i^*\})].$$

Die Mannigfaltigkeiten $x_0 + N(\{y_i^*\}) = y_i^{*-1}(\{\beta_i\})$ besitzen die Dimension $n - 1$.

VI'. *Jede m-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit M von V ist der Durchschnitt von $n - m$ linearen Mannigfaltigkeiten der Dimension $n - 1$ und läßt sich durch $n - m$ Gleichungen der Form*

$$\langle x, y_i^* \rangle \doteq \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*) \tag{10}$$

beschreiben.

Es sei $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die zugehörige Kobasis von V^*. Die Vektoren $x \in M$ sowie die Kovektoren $y_i^* \in N^*(W)$ lassen sich durch die Basis $\mathfrak{B}$ bzw. die Kobasis $\mathfrak{B}^*$ in der Form $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ und $y_i^* = \alpha_{i1} x_1^* + \cdots + \alpha_{in} x_n^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m^*)$ ausdrücken. Für die Gleichungen (10) und (10^0) ergibt sich

$$\langle x, y_i^* \rangle = \alpha_{i1} \cdot \xi_1 + \cdots + \alpha_{in} \cdot \xi_n \doteq \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*)$$

bzw.

$$\langle x, y_i^* \rangle = \alpha_{i1} \cdot \xi_1 + \cdots + \alpha_{in} \cdot \xi_n \doteq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m^*).$$

Der Vektor $x \in V$ gehört dann und nur dann der linearen Mannigfaltigkeit M bzw. dem linearen Teilraum W an, wenn seine Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ dem inhomogenen linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \xi_j \doteq \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n - m)$$

bzw. dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \xi_j \doteq 0 \quad (i = 1, \ldots, n - m)$$

genügen. Damit ist gezeigt, daß *sich jeder lineare Teilraum und jede lineare Mannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen Vektorraumes durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben lassen.* Wir haben darüber hinaus das Klammersymbol als abkürzende Schreibweise für lineare Gleichungen erkannt. Die Bedeutung dieser Schreibweise liegt in ihrer Verallgemeinerungsfähigkeit auf unendlichdimensionale Vektorräume.*

4. DIE ADJUNGIERTE ABBILDUNG; RECHENREGELN; DIE TRANSPONIERTE MATRIX; DER RANG DER TRANSPONIERTEN MATRIX

Es seien V und V' zwei lineare Vektorräume, V^* und V'^* ihre dualen Vektorräume, und $A \in \mathscr{A}(V, V')$ sei eine lineare Abbildung von V in V'. Ist $y'^* \in V'^*$ ein beliebiger Kovektor, so definiert er eine Abbildung y^* von V in R durch die Gleichung

$$y^*(x) \underset{\text{Def.}}{=} \langle Ax, y'^* \rangle. \tag{11}$$

Wenn wir beweisen, daß y^* eine lineare Abbildung ist, so ist $y^* \in V^*$, und durch die Gleichung (11) wird jedem Kovektor $y'^* \in V'^*$ ein Kovektor $y^* \in V^*$ zugeordnet.

Die Gleichung (11) bestimmt also eine Abbildung von V'^* in V^*, die wir mit A^* bezeichnen:

$$A^* y'^* \underset{\text{Def.}}{=} y^*. \tag{12}$$

Die Definitionsgleichungen (11) und (12) lassen sich zu einer Gleichung

$$\langle \boldsymbol{x}, A^* \boldsymbol{y}'^* \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'^* \rangle \quad (\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{y}'^* \in V'^*) \tag{13}$$

zusammenfassen. Wir beweisen schließlich, daß A^* eine lineare Abbildung von V'^* in V^* ist, und erhalten den Satz

VII. *Jeder linearen Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ entspricht eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A^* \in \mathscr{A}(V'^*, V^*)$. Der Zusammenhang zwischen den Abbildungen A und A^* wird durch die Gleichung*

$$\langle \boldsymbol{x}, A^* \boldsymbol{y}'^* \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'^* \rangle \tag{13}$$

beschrieben, in der $\boldsymbol{x}$ einen beliebigen Vektor aus V und $\boldsymbol{y}'^*$ einen beliebigen Kovektor aus V'^* bezeichnet.

Die Abbildung A^* heißt die zu A *adjungierte lineare Abbildung*.

Wir beweisen die Linearität der durch (11) definierten Abbildung y^*. Ist $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$, so gilt

$$\begin{aligned} y^*(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \langle A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}'^* \rangle = \langle A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}'^* \rangle \\ &= \langle A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}'^* \rangle + \langle A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}'^* \rangle = y^*(\boldsymbol{x}_1) + y^*(\boldsymbol{x}_2). \end{aligned}$$

Ist $\alpha \in R$, so erhalten wir

$$y^*(\alpha \boldsymbol{x}) = \langle A(\alpha \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}'^* \rangle = \langle \alpha A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'^* \rangle = \alpha \cdot \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'^* \rangle = \alpha \cdot y^*(\boldsymbol{x}).$$

Als nächstes beweisen wir die Linearität der durch die Gleichung (12) definierten Abbildung A^*. Für $\boldsymbol{y}_1'^*, \boldsymbol{y}_2'^* \in V'^*$ erhalten wir aus (11) und (12)

$$\begin{aligned} [A^*(\boldsymbol{y}_1'^* + \boldsymbol{y}_2'^*)](\boldsymbol{x}) &= \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1'^* + \boldsymbol{y}_2'^* \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1'^* \rangle + \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2'^* \rangle \\ &= [A^*\boldsymbol{y}_1'^*](\boldsymbol{x}) + [A^*\boldsymbol{y}_2'^*](\boldsymbol{x}) = [A^*\boldsymbol{y}_1'^* + A^*\boldsymbol{y}_2'^*](\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes $\boldsymbol{x} \in V$ gilt, folgt $A^*(\boldsymbol{y}_1'^* + \boldsymbol{y}_2'^*) = A^*\boldsymbol{y}_1'^* + A^*\boldsymbol{y}_2'^*$. Ist $\alpha \in R$, so gilt entsprechend

$$[A^*(\alpha \boldsymbol{y}'^*)](\boldsymbol{x}) = \langle A\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}'^* \rangle = \alpha \cdot \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'^* \rangle = \alpha \cdot [A^*\boldsymbol{y}'^*](\boldsymbol{x}) = [\alpha A^*\boldsymbol{y}'^*](\boldsymbol{x}),$$

und daraus folgt $A^*(\alpha \boldsymbol{y}'^*) = \alpha A^* \boldsymbol{y}'^*$. Satz VII ist damit bewiesen.

Für den Übergang zur adjungierten linearen Abbildung gelten folgende Rechenregeln:

a) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^* \quad (A_1, A_2 \in \mathscr{A}(V, V'))$;

b) $(\alpha A)^* = \alpha A^* \quad (A \in \mathscr{A}(V, V'), \alpha \in R)$;

c) $(A'A)^* = A^* A'^* \quad (A \in \mathscr{A}(V, V'), A' \in \mathscr{A}(V', V''))$.

Sind die linearen Vektorräume V und V' endlichdimensional[1]), so gilt darüber hinaus:

d) $(A^*)^* = A \quad (A \in \mathscr{A}(V, V'))$.

Zum Beweis betrachten wir die Gleichung (13) für zwei lineare Abbildungen $A_1, A_2 \in \mathscr{A}(V, V')$. Dann gilt für jeden Vektor $x \in V$ und jeden Kovektor $y'^* \in V'^*$

$$\begin{aligned}\langle x, (A_1 + A_2)^* y'^*\rangle &= \langle (A_1 + A_2) x, y'^*\rangle = \langle A_1 x + A_2 x, y'^*\rangle \\ &= \langle A_1 x, y'^*\rangle + \langle A_2 x, y'^*\rangle = \langle x, A_1^* y'^*\rangle + \langle x, A_2^* y'^*\rangle \\ &= \langle x, A_1^* y'^* + A_2^* y'^*\rangle = \langle x, (A_1^* + A_2^*) y'^*\rangle.\end{aligned}$$

Es ist also $\langle x, [(A_1 + A_2)^* - (A_1^* + A_2^*)] y'^*\rangle = 0$ für jeden Vektor $x \in V$. Daraus folgt $[(A_1 + A_2)^* - (A_1^* + A_2^*)] y'^* = o^*$ für jeden Kovektor $y'^* \in V'^*$, und das bedeutet $(A_1 + A_2)^* - (A_1^* + A_2^*) = O$.

Wir haben die Gleichung a) bewiesen. Die Gleichung b) beweist man entsprechend. Sind A und A' lineare Abbildungen aus $\mathscr{A}(V, V')$ bzw. aus $\mathscr{A}(V', V'')$, so ist $A'A \in \mathscr{A}(V, V'')$. Infolgedessen ist $(A'A)^* \in \mathscr{A}(V''^*, V^*)$. Für jeden Vektor $x \in V$ und jeden Kovektor $y''^* \in V''^*$ gilt

$$\begin{aligned}\langle x, (A'A)^* y''^*\rangle &= \langle (A'A) x, y''^*\rangle = \langle A'(Ax), y''^*\rangle \\ &= \langle Ax, A'^* y''^*\rangle = \langle x, A^*(A'^* y''^*)\rangle \\ &= \langle x, (A^* A'^*) y'^*\rangle.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung schließt man die Gleichung c) in Analogie zu den im Fall a) angegebenen Schlüssen.

Wir machen den Leser ausdrücklich darauf aufmerksam, daß man die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes von linearen Abbildungen beim Übergang zu den adjungierten Abbildungen vertauschen muß.

Zum Beweis der Gleichung d) erinnern wir daran, daß wir für endlichdimensionale Vektorräume V^{**} mit V und V'^{**} mit V' identifiziert haben. Infolgedessen ist $(A^*)^* \in \mathscr{A}(V, V')$, und für jeden Vektor $x \in V$ und jeden Kovektor $y'^* \in V'^*$ gilt $\langle (A^*)^* x, y'^*\rangle = \langle x, A^* y'^*\rangle = \langle Ax, y'^*\rangle$. Aus dieser Gleichung läßt sich entsprechend dem Fall a) die Gleichung d) ableiten.

Im folgenden untersuchen wir die Beziehungen zwischen den den linearen Abbildungen A und A^* zugeordneten Matrizen. Wir betrachten wiederum endlichdimensionale lineare Vektorräume V und V'. Es sei $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}' = \{x'_1, \ldots, x'_{n'}\}$ eine Basis von V'. Mit $\mathfrak{B}^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ und mit $\mathfrak{B}'^* = \{x_1'^*, \ldots, x_{n'}'^*\}$ bezeichnen wir die dualen Basen von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ in V^* bzw.

---

[1]) Allgemeiner: reflexiv.

V'^*. Die Matrix $\|A\| = \|\alpha_{i'i}\|_{n',n}$ der linearen Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ erhalten wir durch die Gleichungen

$$Ax_i = \sum_{i'=1}^{n'} \alpha_{i'i} x'_{i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Koordinaten $\alpha_{i'i}$ $(i' = 1, 2, \ldots, n')$ des Vektors Ax_i in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}'$ können wir nach (6) in der Form

$$\alpha_{i'i} = \langle Ax_i, x'^*_{i'} \rangle \quad (i = 1, \ldots, n;\ i' = 1, \ldots, n')$$

ausdrücken, wobei $x'^*_1, \ldots, x'^*_n$ die Elemente der Kobasis $\mathfrak{B}'^*$ von $\mathfrak{B}'$ bezeichnen.

Ist $A^* = \|A^*\| = \|\alpha^*_{ii'}\|_{n,n'}$ die Matrix, die der linearen Abbildung A^* in bezug auf $\mathfrak{B}'^*$ und $\mathfrak{B}^*$ entspricht, so gelten die Gleichungen

$$A^* x'^*_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{ii'} x^*_i \quad (i' = 1, \ldots, n'),$$

deren Koeffizienten wir nach (6*) in der Form

$$\alpha^*_{ii'} = \langle x_i, A^* x'^*_{i'} \rangle \quad (i = 1, \ldots, n;\ i' = 1, \ldots, n')$$

schreiben können. Aus der Gleichung (13) erhalten wir

$$\alpha^*_{ii'} = \alpha_{i'i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i' = 1, \ldots, n'). \tag{14}$$

Schreiben wir uns die Matrizen $A = \Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}A$ und $A^* = \Phi_{\mathfrak{B}'^*,\mathfrak{B}^*}A^*$ ausführlich auf, so gilt

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n'1} & \alpha_{n'2} & \cdots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix}, \quad A^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n'1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n'2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{n'n} \end{Vmatrix}.$$

Die Matrix A^* entsteht aus der Matrix A durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Ist A eine gegebene Matrix, so bezeichnen wir die Matrix A^*, für deren Elemente die Gleichungen (14) gelten und die aus der gegebenen Matrix durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen entsteht, als die zu A *transponierte Matrix* und schreiben

$$A^* = A^{\mathsf{T}}. \tag{15}$$

Die Zeilen der Matrix A sind die Spalten der transponierten Matrix A^{T}, und die Spalten der Matrix A sind die Zeilen der transponierten Matrix A^{T}.

VIII. *Es seien V und V' endlichdimensionale lineare Vektorräume, V^* und V'^* die zugehörigen dualen Räume. Ist $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung von V in V' und ist $A^* \in \mathscr{A}(V'^*, V^*)$ die zu A adjungierte lineare Abbildung, so sind die zugehörigen Matrizen zueinander transponiert, d. h., es gilt*

$$A^* = \Phi_{\mathfrak{B}'^*,\mathfrak{B}^*}(A^*) = (\Phi_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}(A))^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}.$$

Dabei sind die Basen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'^*$ als zueinander dual vorausgesetzt.

Den oben bewiesenen Rechenregeln a)—d) für den Übergang zur adjungierten Abbildung entsprechen die folgenden Regeln für das Rechnen mit transponierten Matrizen:

a') $(A_1 + A_2)^{\mathsf{T}} = A_1^{\mathsf{T}} + A_2^{\mathsf{T}}$,

b') $(\alpha A)^{\mathsf{T}} = \alpha A^{\mathsf{T}}$,

c') $(A' \cdot A)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} \cdot A'^{\mathsf{T}}$,

d') $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Matrizen A_1 und A_2 vom gleichen Typ sind, während die Typen der Matrizen A' und A so gewählt sein müssen, daß das Produkt $A' \cdot A$ erklärt ist.

Wir weisen auch hier besonders auf die Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren eines Produktes beim Übergang zur transponierten Matrix hin.

Die Gleichungen a')—d') erhält man direkt aus den Gleichungen a)—d), wenn man von den linearen Abbildungen zu den ihnen zugeordneten Matrizen übergeht und Satz VIII berücksichtigt.

Aus verschiedenen Überlegungen wissen wir, daß der Rang einer Matrix oder einer linearen Abbildung in unserer Theorie eine bedeutende Rolle spielt. Da der Rang einer linearen Abbildung mit dem Rang der zugehörigen Matrix übereinstimmt, genügt es, wenn wir untersuchen, wie der Rang einer linearen Abbildung A mit dem Rang ihrer adjungierten Abbildung A^* zusammenhängt. Wir beweisen die Sätze:

IX. *Sind die linearen Vektorräume V und V' endlichdimensional und ist $A^* \in \mathscr{A}(V'^*, V^*)$ die zu $A \in \mathscr{A}(V, V')$ adjungierte lineare Abbildung, so gilt*

$$r(A^*) = r(A).$$

IX'. *Der Rang der transponierten Matrix A^{T} ist gleich dem Rang der ursprünglichen Matrix A.*

Satz IX' erhält man aus dem Satz IX, wenn man von den Abbildungen A und A^* zu den ihnen zugeordneten Matrizen übergeht.

Wir haben früher bewiesen (§ 9, Nr. 6, Satz VIII), daß der Rang einer Matrix gleich der Dimension des von ihren Spalten erzeugten Teilraumes von $\hat{\mathscr{A}}_n$, d. h. gleich der Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Spalten ist. Da die Spalten der transponierten Matrix mit den Zeilen der ursprünglichen Matrix übereinstimmen, erhalten wir aus dem Satz IX':

X. *Der Rang einer Matrix A ist gleich der Dimension des von ihren Zeilen erzeugten Teilraumes von $\check{\mathscr{A}}_n$.*

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen.

Damit haben wir eine neue Charakterisierung des Ranges einer Matrix gewonnen und festgestellt, daß die Zeilen und Spalten einer Matrix für die Berechnung des Ranges gleichberechtigt sind.

Wir müssen noch den Satz IX beweisen. Dazu betrachten wir den Annullatorraum $N^*(AV)$ des Bildes der Abbildung A. Dieser Teilraum von V'^* besteht aus allen Kovektoren y'^* mit der Eigenschaft

$$\langle Ax, y'^* \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Diese Gleichung gilt aber dann und nur dann, wenn

$$\langle x, A^* y'^* \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in V$$

ist, und daraus folgt $A^*y'^* = o^*$. Der Teilraum $N^*(AV)$ ist also gleich dem Kern der Abbildung A^*. Betrachten wir die Beziehungen zwischen den Dimensionen der auftretenden Vektorräume, so gilt

$$r(A^*) + d(A^*) = \dim V'^* = \dim V'$$

und

$$\dim AV + \dim N^*(AV) = \dim V'.$$

Aus den Gleichungen $r(A) = \dim AV$ und $d(A^*) = \dim N^*(AV)$ folgt dann die Behauptung.

5. DER ADJUNGIERTE OPERATOR; * KOVARIANTES UND KONTRAVARIANTES TRANSFORMATIONSVERHALTEN *

Wenden wir die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts auf den Spezialfall $V' = V$ an, so erhalten wir den folgenden Satz über die Beziehungen zwischen den linearen Operatoren auf einem Vektorraum und den linearen Operatoren auf dem zugehörigen dualen Vektorraum.

XI. *Jedem linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ entspricht eindeutig ein linearer Operator $A^* \in \mathscr{A}(V^*)$. Der Zusammenhang zwischen den Operatoren A und A^* wird durch die Gleichung*

$$\langle x, A^*y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle \quad (x \in V, y^* \in V^*)$$

gegeben.

Der Operator A^* heißt der zu A *adjungierte Operator*.

Für den Übergang zum adjungierten Operator gelten folgende Rechenregeln:

a) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^* \quad (A_1, A_2 \in \mathscr{A}(V))$;

b) $(\alpha A)^* = \alpha A^* \quad (A \in \mathscr{A}(V), \alpha \in R)$;

c) $(A'A)^* = A^*A'^* \quad (A, A' \in \mathscr{A}(V))$;

c$_-$) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (A \in \mathscr{A}(V), A$ regulär$)$.

Ist V ein endlichdimensionaler[1]) Vektorraum, so gilt überdies

$$\text{d)}\ (A^*)^* = A \quad (A \in \mathscr{A}(V)).$$

Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}^*$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis von V^*, so sind die den Operatoren A bzw. A^* in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ zugeordneten quadratischen Matrizen transponiert:

$$A^* = A^{\mathsf{T}},$$

und für das Rechnen mit transponierten Matrizen gelten die Regeln a')—d') des vorhergehenden Abschnitts. Aus der Gleichung c₋) ergibt sich darüber hinaus für eine reguläre quadratische Matrix A die Gleichung

$$\text{c}'_-)\ (A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1} \quad (A \text{ regulär quadratisch}).$$

Die Gleichung c₋) müssen wir noch beweisen. Sie folgt unmittelbar aus c), wenn man beachtet, daß E^* der Einsoperator auf dem Vektorraum V^* ist. Es ist $A^{-1}A = E$. Durch Übergang zum adjungierten Operator erhält man die Gleichung $A^*(A^{-1})^* = E^*$. Wird diese Gleichung von links mit $(A^*)^{-1}$ multipliziert, so folgt c₋). Die Gleichung c'₋) ergibt sich durch den Übergang von den Operatoren zu den ihnen entsprechenden Matrizen.

*Wir betrachten zwei Basen des linearen Vektorraumes V, die wir mit $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ bezeichnen. Ist A der lineare Operator, der die Basiselemente von $\mathfrak{B}_1$ in die Basiselemente von $\mathfrak{B}_2$ überführt, so sind die Bilder $A^*\mathfrak{B}_2^*$ der zu $\mathfrak{B}_2$ dualen Basis $\mathfrak{B}_2^*$ die Elemente der zu $\mathfrak{B}_1$ dualen Basis $\mathfrak{B}_1^*$. Aus den Gleichungen $Ax_i = y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ folgt nämlich

$$\delta_{ij} = \langle y_i, y_j^*\rangle = \langle Ax_i, y_j^*\rangle = \langle x_i, A^*y_j^*\rangle = \langle x_i, x_j^*\rangle.$$

Die linearen Funktionale $A^*y_j^*$, x_j^* $(j = 1, 2, \ldots, n)$ stimmen auf einer Basis von V überein und sind folglich gleich:

$$A^*y_j^* = x_j^* \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Durch Übergang zu den Matrizen erhalten wir unter Berücksichtigung von § 11, Nr. 4, Satz VII:

XII. *Sind $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ zwei Basen des n-dimensionalen Vektorraumes V, sind $\mathfrak{B}_1^* = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ und $\mathfrak{B}_2^* = \{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ die zugehörigen dualen Basen des dualen Vektorraumes V^* und ist*

$$y_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'}, \quad x_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i}^{(-1)} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

so gilt

$$x_{i'}^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} y_i^*, \quad y_{i'}^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}^{(-1)} x_i^* \quad (i' = 1, \ldots, n). \tag{16*}$$

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bzw. $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die Koordinaten eines Vektors x in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ und sind $\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*$ bzw. $\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*$ die Koordinaten eines Kovektors x^* in bezug auf die Kobasen $\mathfrak{B}_1^*$ bzw. $\mathfrak{B}_2^*$, so gilt

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i, \quad \eta_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}^{(-1)} \cdot \xi_i \quad (i' = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

---

[1]) Allgemein ein reflexiver.

und
$$\eta_i^* = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i'}^*, \quad \xi_i^* = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i}^{(-1)} \cdot \eta_{i'}^* \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{17*}$$

Dabei ist $\|\alpha_{i'i}^{(-1)}\|_{n,n} = A^{-1}$ *die zu* $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ *inverse Matrix.*

Betrachtet man die Gleichungen (16)–(17*) näher, so stellt man fest, daß die Gleichungen (16) und (17*) sowie (16*) und (17) ineinander übergehen, wenn man x durch ξ^* und y durch η^* bzw. x^* durch ξ und y^* durch η ersetzt und umgekehrt. Es ist üblich, dies durch die folgende Formulierung auszudrücken:

Die Koordinaten des Vektors x *transformieren sich beim Übergang von der Basis* $\mathfrak{B}_1$ *zur Basis* $\mathfrak{B}_2$ *kontravariant zu den Basen* $\mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_2$ *und kovariant zu den Kobasen* $\mathfrak{B}_1^*$ *und* $\mathfrak{B}_2^*$.

Die Koordinaten des Kovektors x^* *transformieren sich beim Übergang von der Basis* $\mathfrak{B}_1$ *zur Basis* $\mathfrak{B}_2$ *kovariant zu den Basen* $\mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_2$ *und kontravariant zu den Kobasen* $\mathfrak{B}_1^*$ *und* $\mathfrak{B}_2^*$.

Zum Beweis von Satz XII brauchen wir nur darauf hinzuweisen, daß der Gleichung $A^* y_i^* = x_i^*$ die Gleichungen
$$x_{i'}^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i}^* y_i^* \quad (i' = 1, \ldots, n)$$
entsprechen, wobei $A^* = \|\alpha_{i'i}^*\|_{n,n} = A^{\mathsf{T}}$ die zu A transponierte Matrix ist. Es gilt also $\alpha_{i'i}^* = \alpha_{ii'}$, und daraus folgt die erste der Gleichungen (16*). Alle übrigen Gleichungen erhält man entsprechend.$_*$

6. AUFGABEN

1. Ist R^n der lineare Vektorraum der n-tupel reeller Zahlen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, so definiert jedes n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ reeller Zahlen ein lineares Funktional y^* durch
$$y^*(x) = \alpha_1 \cdot \xi_1 + \alpha_2 \cdot \xi_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \xi_n. \tag{*}$$
Umgekehrt läßt sich jedes lineare Funktional y^* auf dem linearen Vektorraum R^n in der Form (*) durch ein n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ reeller Zahlen beschreiben.

2. *Ist $C(\alpha_0, \beta_0)$ der lineare Vektorraum, der auf dem abgeschlossenen Intervall $[\alpha_0, \beta_0]$ definierten und dort stetigen reellen Funktionen, so ist für $x(t), y(t) \in C(\alpha_0, \beta_0)$
$$y^*(x) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} y(\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$
ein lineares Funktional auf dem Vektorraum $C(\alpha_0, \beta_0)$.

3. Man beweise die Matrizengleichungen
$$(A_1 + A_2)^{\mathsf{T}} = A_1^{\mathsf{T}} + A_2^{\mathsf{T}}, \quad (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A \quad \text{und} \quad (A_1 \cdot A_2)^{\mathsf{T}} = A_2^{\mathsf{T}} \cdot A_1^{\mathsf{T}}$$
direkt, ohne die entsprechenden Eigenschaften für lineare Abbildungen zu benutzen.

4.* Die durch
$$\Psi A = A^* \quad (A \in \mathscr{A}(V))$$
definierte Abbildung Ψ ist ein Isomorphismus des linearen Vektorraumes $\mathscr{A}(V)$ auf den linearen Vektorraum $\mathscr{A}(V^*)$, und es gilt überdies
$$\Psi(A_1 A_2) = \Psi A_2 \Psi A_1.$$

5. Sind V_1, V_2 lineare Teilräume von V, so gilt
$$N^*(V_1 \cap V_2) = N^*(V_1) + N^*(V_2), \quad N^*(V_1 \cup V_2) = N^*(V_1) \cap N^*(V_2).$$
Sind V_1^*, V_2^* lineare Teilräume von V^*, so gilt
$$N(V_1^* \cap V_2^*) = N(V_1^*) + N(V_2^*), \quad N(V_1^* \cup V_2^*) = N(V_1^*) \cap N(V_2^*).$$

6.* Ist $V = V_1 \dotplus V_2$ die direkte Summe der Teilräume V_1 und V_2, so gilt $V^* = N^*(V_1) \dotplus N^*(V_2)$.

§ 13. DETERMINANTEN

1. EINLEITUNG

In diesem Paragraphen lernen wir den Begriff der Determinante kennen. Es handelt sich dabei um eine spezielle Funktion, die auf der Menge der n-reihigen quadratischen Matrizen erklärt ist und reelle Werte besitzt. Sie spielt in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle. In der Theorie der linearen Vektorräume werden wir sie unter anderem benutzen, um die lineare Unabhängigkeit von Vektoren festzustellen; ferner werden wir eine neue Methode zur Berechnung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems angeben, die auf der Anwendung gewisser Sätze über die Determinante beruht.

In der Geometrie dient die Determinante z. B. zur Berechnung von Volumina. Die damit zusammenhängenden Fragen der Theorie der Vektorräume werden im § 17 untersucht. *Als Anwendungsbeispiele aus der Analysis nennen wir die Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlicher (Jacobische Funktionaldeterminante) sowie die Theorie der linearen Differentialgleichungen (Wronskische Determinante).*

2. PERMUTATIONEN; DIE GRUPPEN $\mathfrak{S}_n$

Dieser und der folgende Abschnitt enthalten einige Vorbetrachtungen, die für die Definition und das Verständnis der Determinante erforderlich sind. Wir beschäftigen uns zunächst mit Permutationen.

Unter einer *Permutation* der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ verstehen wir eine umkehrbar eindeutige Abbildung π dieser Zahlen auf sich. Mit $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ werden also abermals die Zahlen $1, 2, \ldots, n$, aber in einer anderen Reihenfolge bezeichnet.

Sind π und π' zwei Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so kann man die Permutation π' auf das „Ergebnis" $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ der Permutation π anwenden und erhält abermals eine Permutation, die das *Produkt* $\pi'\pi$ *der Permutationen* π *und* π' genannt wird. Für das Produkt ergibt sich folgende Definitionsgleichung:

$$(\pi'\pi)(i) \underset{\text{Def.}}{=} \pi'(\pi(i)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Der Leser sei an die Multiplikation von linearen Abbildungen erinnert.

Die Permutationen sind zwar keine „linearen" Abbildungen, aber *Abbildungen einer Menge auf sich.* Der Wertebereich der Abbildung π besteht aus den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, und infolgedessen liegt der Wertebereich von π im Definitionsbereich von π', so daß π' auf die Werte der Abbildung π angewendet werden kann.

Wir betrachten ein Beispiel.

1⁰. Es sei $n = 4$, und π und π' seien folgende Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4:

$$\pi: \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \\ 4 \to 4 \end{matrix} \qquad \pi': \begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to 1 \end{matrix}$$

Es ist $\pi(1) = 2$, $\pi'(2) = 2$, also $(\pi'\pi)(1) = 2$. Es ist $\pi(2) = 3$, $\pi'(3) = 4$, $(\pi'\pi)(2) = 4$ usw.,

$$\pi'\pi: \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 3 \\ 4 \to 1 \end{matrix}$$

Ist π eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so besitzt π als umkehrbar eindeutige Abbildung eine Umkehrabbildung π^{-1}, die ebenfalls die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf sich abbildet und folglich eine Permutation ist. Für das Produkt $\pi^{-1}\pi$ gilt offenbar $(\pi^{-1}\pi)(i) = i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Die *identische Permutation*, d. h. diejenige Abbildung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf sich, die jede Zahl auf sich selbst abbildet, bezeichnen wir mit ε:

$$\varepsilon(i) = i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Dann gelten die Gleichungen

$$\pi\varepsilon = \pi = \varepsilon\pi, \quad \pi^{-1}\pi = \varepsilon = \pi\pi^{-1}.$$

Erinnern wir uns der Definition einer Gruppe (vgl. § 11, Nr. 2) und beachten, daß die Nacheinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist, so erhalten wir den Satz

I. *Die Permutationen der Zahlen* $1, 2, \ldots, n$ *bilden in bezug auf die durch* (1) *definierte Multiplikation eine Gruppe.*

Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe vom Grad n* und wird mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet.

2⁰. Wir geben die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ als Beispiel an.

$$\varepsilon: \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{matrix} \qquad \pi_1: \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{matrix} \qquad \pi_2: \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{matrix} \qquad \pi_3: \begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{matrix} \qquad \pi_4: \begin{matrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{matrix} \qquad \pi_5: \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{matrix}$$

Es ist

$$\pi_1^2 = \varepsilon, \quad \pi_1^{-1} = \pi_1; \quad \pi_2^2 = \pi_2^{-1} = \pi_4, \quad \pi_2^3 = \varepsilon;$$

$$\pi_3^2 = \varepsilon, \quad \pi_3 = \pi_3^{-1} = \pi_2\pi_1 = \pi_1\pi_4;$$

$$\pi_4^2 = \pi_4^{-1} = \pi_2, \quad \pi_4^3 = \varepsilon; \quad \pi_5^2 = \varepsilon, \quad \pi_5 = \pi_5^{-1} = \pi_1\pi_2 = \pi_4\pi_1.$$

* *Die Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ *besteht aus* $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ *Elementen.*

Den Beweis dieser Aussage führen wir durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ enthält $\mathfrak{S}_1$ offenbar nur die identische Permutation ε: $\varepsilon(1) = 1$, und die Behauptung ist richtig.

Wir nehmen an, daß $\mathfrak{S}_{n-1}$ aus $(n-1)!$ Permutationen besteht, und untersuchen $\mathfrak{S}_n$. Es sei π eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Wir betrachten das Bild $\pi(n) = m$ der Zahl n bei der gegebenen Permutation π. Dann ist $1 \leqq m \leqq n$. Mit $\pi^{(m,n)}$ bezeichnen wir diejenige Permutation aus $\mathfrak{S}_n$, die die Zahlen m und n vertauscht und alle anderen fest läßt:

$$\pi^{(m,n)}(m) = n, \quad \pi^{(m,n)}(n) = m, \quad \pi^{(m,n)}(i) = i \quad \text{für} \quad i \neq m, n.$$

Für diese Permutation gilt $\pi^{(m,n)}\pi^{(m,n)} = \varepsilon$, und das Produkt $\pi^{(m,n)}\pi$ von $\pi^{(m,n)}$ mit der gegebenen Permutation ist eine Permutation $\pi^{(n)}$, die die Zahl n fest läßt: $\pi^{(n)}(n) = (\pi^{(m,n)}\pi)(n) = \pi^{(m,n)}(m) = n$.

Multiplizieren wir die Gleichung $\pi^{(m,n)}\pi = \pi^{(n)}$ von links mit $\pi^{(m,n)}$, so gilt

$$\pi^{(m,n)}\pi^{(m,n)}\pi = \pi = \pi^{(m,n)}\pi^{(n)},$$

und wir stellen fest: *Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich in der Form*

$$\pi = \pi^{(m,n)}\pi^{(n)} \quad (1 \leq m \leq n) \tag{3}$$

schreiben. Dabei ist $\pi^{(n)}$ eine Permutation aus $\mathfrak{S}_n$, die die Zahl n fest läßt. Jeder Permutation $\pi^{(n)} \in \mathfrak{S}_n$ entspricht genau eine Permutation $\pi' \in \mathfrak{S}_{n-1}$: $\pi'(i) = \pi^{(n)}(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Umgekehrt läßt sich jede Permutation $\pi' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ auf genau eine Weise zu einer Permutation $\pi^{(n)} \in \mathfrak{S}_n$ „erweitern":

$$\pi^{(n)}(i) = \pi'(i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \text{und} \quad \pi^{(n)}(n) = n.$$

Nach Induktionsannahme gibt es $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$ Permutationen $\pi' \in \mathfrak{S}_{n-1}$, und folglich gibt es $(n-1)!$ verschiedene Permutationen $\pi^{(n)} \in \mathfrak{S}_n$, die die Zahl n fest lassen. Ferner gibt es n Permutationen $\pi^{(m,n)}$. Wenn wir zeigen, daß die Permutationen $\pi_1 = \pi^{(m_1,n)}\pi_1^{(n)}$ und $\pi_2 = \pi^{(m_2,n)}\pi_2^{(n)}$ nur dann gleich sind, wenn $\pi^{(m_1,n)} = \pi^{(m_2,n)}$ und $\pi_1^{(n)} = \pi_2^{(n)}$ ist, so folgt die Existenz von $(n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und damit die Behauptung. Es sei $\pi_1 = \pi^{(m_1,n)}\pi_1^{(n)} = \pi^{(m_2,n)}\pi_2^{(n)} = \pi_2$. Dann ist $\pi_1(n) = m_1 = \pi_2(n) = m_2$ und folglich $\pi^{(m_1,n)} = \pi^{(m_2,n)}$. Ferner gilt $\pi_1^{(n)} = \pi^{(m_1,n)}\pi_1 = \pi^{(m_2,n)}\pi_2 = \pi_2^{(n)}$, und das war zu beweisen. $_*$

Die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ unterteilt man in zwei Klassen, in die Klasse der *geraden Permutationen* und die Klasse der *ungeraden Permutationen*. Dies geschieht auf folgende Weise. Für eine feste Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ betrachten wir das Produkt aus $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ Faktoren:

$$\begin{aligned}
&(\pi(2) - \pi(1))\\
\times\; &(\pi(3) - \pi(1)) \cdot (\pi(3) - \pi(2))\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\times\; &(\pi(n-1) - \pi(1)) \cdot (\pi(n-1) - \pi(2)) \cdots (\pi(n-1) - \pi(n-2))\\
\times\; &(\pi(n) - \pi(1)) \cdot (\pi(n) - \pi(2)) \cdots (\pi(n) - \pi(n-2)) \cdot (\pi(n) - \pi(n-1)).
\end{aligned} \tag{4}$$

In Analogie zu dem früher eingeführten Summenzeichen $\sum$ erklärt man ein Produktzeichen $\prod$ zur abkürzenden Schreibweise eines Produktes:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Das Produkt (4) können wir dann in folgender Form schreiben:

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)). \tag{4'}$$

Da die Zahlen $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bis auf die Reihenfolge übereinstimmen, erhalten wir zunächst

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)) = \pm \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i). \tag{5}$$

Ist $(\pi(l) - \pi(k))$, $k < l$, ein beliebiger Faktor des Produktes, das auf der linken Seite der Gleichung (5) steht, so kommt dieser Faktor auch auf der rechten Seite von (5) vor, wenn $\pi(l) > \pi(k)$ ist.

Ist $\pi(l) < \pi(k)$, so kommt auf der rechten Seite der Gleichung (5) der Faktor $(\pi(k) - \pi(l)) = -(\pi(l) - \pi(k))$ vor. Die beiden Produkte unterscheiden sich also höchstens im Vorzeichen.

Das Zahlenpaar (k, l) $(1 \leqq k \leqq n;\ 1 \leqq l \leqq n)$ heißt eine *Inversion der Permutation* π, wenn $k < l$ und $\pi(k) > \pi(l)$ ist. Bezeichnet $\alpha(\pi)$ die Anzahl der Inversionen der Permutation π, so läßt sich (5) zu der Gleichung

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)) = (-1)^{\alpha(\pi)} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i) \tag{5'}$$

verschärfen. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt eine *gerade Permutation*, wenn die Anzahl ihrer Inversionen $\alpha(\pi)$ eine *gerade Zahl oder gleich Null* ist. Ist $\alpha(\pi)$ eine *ungerade Zahl*, so heißt π eine *ungerade Permutation*. Das Vorzeichen oder *Signum* des Produktes (4) wird das *Signum der Permutation* π genannt, und man schreibt

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\alpha(\pi)}$$

Damit gilt der Satz

II *Eine Permutation* $\pi \in \mathfrak{S}_n$ *ist dann und nur dann gerade, wenn* $\operatorname{sgn} \pi = 1$ *oder*

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i)$$

ist.

Die identische Permutation ε *ist eine gerade Permutation*, denn es ist $\alpha(\varepsilon) = 0$.

3°. Als Beispiel einer ungeraden Permutation erwähnen wir die Permutation $\pi^{(k,l)}$ $(1 \leqq k \leqq n,$ $1 \leqq l \leqq n,\ k \neq l)$, die jede von k und l verschiedene Zahl i $(1 \leqq i \leqq n)$ auf sich abbildet und die Zahlen k und l vertauscht:

$$\pi^{(k,l)}(k) = l, \quad \pi^{(k,l)}(l) = k, \quad \pi^{(k,l)}(i) = i \quad \text{für} \quad i \neq k,\ i \neq l.$$

Wir können annehmen, daß $k < l$ ist. Für alle $i \neq k$, $i \neq l$ und $j \neq k$, $j \neq l$ folgt dann aus $i < j$ die Ungleichung $\pi^{(k,l)}(i) < \pi^{(k,l)}(j)$. Diese Paare (i, j) bilden keine Inversionen. Ist $1 \leqq i < k$, so gilt $\pi^{(k,l)}(i) < \pi^{(k,l)}(k)$ und $\pi^{(k,l)}(i) < \pi^{(k,l)}(l)$, und ist $l < j \leqq n$, so gilt $\pi^{(k,l)}(k) < \pi^{(k,l)}(j)$, $\pi^{(k,l)}(l) < \pi^{(k,l)}(j)$. Diese Paare (i, k), (i, l), (k, j), (l, j) bilden ebenfalls keine Inversionen. Es sei nun $k < i < l$. Dann ist $\pi^{(k,l)}(k) > \pi^{(k,l)}(i)$ und $\pi^{(k,l)}(i) > \pi^{(k,l)}(l)$. Jedes derartige i bestimmt also zwei Inversionen (i, k) und (i, l), so daß die Anzahl der bisher bestimmten Inversionen gerade ist. Betrachten wir schließlich noch das Paar (k, l) selbst, so ist $k < l$ und $\pi^{(k,l)}(k) > \pi^{(k,l)}(l)$. Wir erhalten eine weitere Inversion. *Die Anzahl der Inversionen der Permutation* $\pi^{(k,l)}$ *ist ungerade.*

Eine Permutation der Form $\pi^{(k,l)}$, die zwei Zahlen miteinander vertauscht und alle übrigen fest läßt, heißt eine *Transposition*, und wir haben bewiesen:

III *Eine Transposition* $\pi^{(k,l)}$ *ist eine ungerade Permutation.*

Aus der im Satz II angegebenen Charakterisierung der geraden Permutationen folgt:

IV. *Das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Permutationen ist eine gerade Permutation. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Permutation ist eine ungerade Permutation.*

Sind π und π' Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$, so gilt

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)) = (-1)^{\alpha} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i) \tag{6}$$

und

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi'(j) - \pi'(i)) = (-1)^{\alpha'} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i). \tag{6'}$$

Dabei ist α eine gerade (oder 0) oder ungerade ganze Zahl, je nachdem, ob π eine gerade oder eine ungerade Permutation ist, und entsprechend ist α' eine gerade (oder 0) oder ungerade ganze Zahl, je nachdem, ob die Permutation π' gerade oder ungerade ist. Betrachten wir die Permutation $\pi'\pi$, so ist

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} ((\pi'\pi)(j) - (\pi'\pi)(i)) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi'(\pi(j)) - \pi'(\pi(i))).$$

Wenden wir in der Gleichung (6′) auf die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ die Permutation π an, so erhalten wir

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi'(\pi(j)) - \pi'(\pi(i))) = (-1)^{\alpha'} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\pi(j) - \pi(i)).$$

Berücksichtigen wir die Gleichung (6), so ergibt sich

$$\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} ((\pi'\pi)(j) - (\pi'\pi)(i)) = (-1)^{\alpha'+\alpha} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j - i). \tag{7}$$

Sind die ganzen Zahlen α und α' beide gerade (oder 0) oder beide ungerade, d. h., sind die Permutationen π und π' beide gerade oder beide ungerade, so ist $\alpha' + \alpha$ eine gerade Zahl (oder 0), und $\pi'\pi$ ist eine gerade Permutation. Ist eine der ganzen Zahlen α, α' gerade (oder 0), die andere ungerade, d. h., ist eine der Permutationen π, π' gerade, die andere aber ungerade, so ist $\alpha' + \alpha$ eine ungerade Zahl, und $\pi'\pi$ ist eine ungerade Permutation.

Da $(-1)^{\alpha} = \operatorname{sgn} \pi$, $(-1)^{\alpha'} = \operatorname{sgn} \pi'$ ist, können wir den Satz IV auch folgendermaßen formulieren:

IV′. *Die Funktion* sgn *ist eine multiplikative Funktion auf der Gruppe* $\mathfrak{S}_n$. *Es gilt*

$$\operatorname{sgn}(\pi'\pi) = \operatorname{sgn} \pi' \cdot \operatorname{sgn} \pi. \tag{8}$$

3. MULTILINEARFORMEN; ALTERNIERENDE n-LINEARFORMEN

In diesem Abschnitt erklären wir den Begriff der Multilinearform mit dessen Hilfe wir in Nr. 4 die Determinante definieren werden.

Es sei V ein linearer Vektorraum. Unter einer *Multilinearform*, genauer einer *m-Linearform* auf dem Vektorraum V verstehen wir eine reellwertige Funktion in m Veränderlichen $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$, die jedem m-tupel $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ von Vektoren aus V eine reelle Zahl zuordnet und die in jedem Argument linear ist. Das bedeutet folgendes: Hält man die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ fest, so wird

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = f_i(\boldsymbol{x}_i) \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

eine Funktion f_i des Arguments $\boldsymbol{x}_i$, und diese Funktion ist ein lineares Funktional auf dem Vektorraum V.

Für eine m-Linearform f gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1.\ & f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \\ & = f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m) + f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m), \\ 2.\ & f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \alpha\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m). \end{aligned}$$

Dabei sind $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ Vektoren aus V, und $\alpha \in R$ ist eine reelle Zahl.

Die Multilinearformen bilden eine Verallgemeinerung der im § 12 betrachteten linearen Funktionale oder Linearformen. Ähnlich wie für Linearformen [vgl. § 12, Nr. 2, Formel (7)] wollen wir den Wert einer Multilinearform für ein m-tupel von Vektoren eines endlichdimensionalen Vektorraumes durch die Koordinaten dieser Vektoren und die Werte der Multilinearform für m-tupel von Basiselementen ausdrücken.

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$ eine Basis von V. Ferner sei f eine m-Linearform auf V und $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ ein m-tupel von Vektoren aus V. Sind $\xi_{1i}, \ldots, \xi_{ni}$ die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{x}_i$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$, so gilt

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji}\boldsymbol{y}_j \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Betrachten wir $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ zunächst als Linearform in $\boldsymbol{x}_1$ und halten $\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ fest, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) &= f_1(\boldsymbol{x}_1) = f_1(\xi_{11}\boldsymbol{y}_1 + \xi_{21}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \xi_{n1}\boldsymbol{y}_n) \\ &= \xi_{11} \cdot f_1(\boldsymbol{y}_1) + \xi_{21} \cdot f_1(\boldsymbol{y}_2) + \cdots + \xi_{n1} \cdot f_1(\boldsymbol{y}_n) \end{aligned}$$

oder

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{j1} \cdot f(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m). \tag{9$_1$}$$

Wir halten nun $y_j, x_3, \ldots, x_m$ fest und betrachten jedes $f(y_j, x_2, \ldots, x_m)$ als Linearform in x_2: $f(y_j, x_2, \ldots, x_m) = f_{j2}(x_2)$. Dann gilt

$$f_{j2}(x_2) = f_{j2}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{k2} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k2} \cdot f_{j2}(y_k)$$

oder

$$f(y_j, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k2} \cdot f(y_j, y_k, x_3, \ldots, x_m). \tag{9_2}$$

Setzen wir dies in die Gleichung (9_1) ein und ersetzen die Summationsindizes j durch j_1 und k durch j_2, so erhalten wir

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \xi_{j_1 1} \cdot \xi_{j_2 2} \cdot f(y_{j_1}, y_{j_2}, x_3, \ldots, x_m). \tag{9_{1,2}}$$

Die Fortsetzung dieser Zerlegung ergibt schließlich die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \xi_{j_1 1} \cdot \xi_{j_2 2} \cdots \xi_{j_m m} \cdot f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}). \tag{10}$$

Das Ergebnis fassen wir in folgendem Satz zusammen:

V. *Es sei f eine m-Linearform auf dem n-dimensionalen linearen Vektorraum V und $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis von V. Gilt für jedes m-tupel $(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m})$ von Basiselementen die Gleichung $f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}) = \eta_{j_1 j_2 \ldots j_m}$, so läßt sich die m-Linearform f in der Gestalt*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \eta_{j_1 j_2 \ldots j_m} \cdot \xi_{j_1 1} \cdot \xi_{j_2 2} \cdots \xi_{j_m m} \tag{10}$$

als lineare Funktion in den Koordinaten $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ der Vektoren x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ darstellen.

Untersuchen wir nun eine n-Linearform auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so definieren die Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_n$ von $\eta_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, wenn sie alle verschieden sind, eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$: $\pi(k) = j_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Kennen wir das Verhalten der n-Linearform f gegenüber Permutationen ihrer Argumente, so können wir Beziehungen zwischen den $\eta_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ ableiten und die Darstellung (10) der n-Linearform f wesentlich vereinfachen. Wir betrachten folgenden Spezialfall:

Eine n-Linearform f heißt *alternierend*, wenn für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ und jedes n-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Vektoren aus V

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{sgn} \pi \cdot f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

gilt.

Zunächst beweisen wir den Satz

VI. *Ist $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein n-tupel von Vektoren aus V und ist einer dieser Vektoren ein Vielfaches eines anderen, so gilt für jede alternierende n-Linearform f über V*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Ist $x_k = \alpha x_l$ und $k \neq l$ (wir nehmen an, daß $k < l$ ist), so folgt aus der Linearität der n-Linearform f im k-ten Argument

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n).$$

Setzen wir $x'_i = x_i$ für $i \neq k$, $x'_k = x_l$, so ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Wenden wir auf die Argumente $x'_1, \ldots, x'_n$ die ungerade Permutation $\pi = \pi^{(k,l)}$ an, so folgt $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = -f(x'_{\pi(1)}, x'_{\pi(2)}, \ldots, x'_{\pi(n)})$, und da $x'_k = x_l = x'_l$ ist, gilt $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = f(x'_{\pi(1)}, x'_{\pi(2)}, \ldots, x'_{\pi(n)})$. Damit ist $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 0$.

Aus dem Satz VI erhalten wir als Folgerung:

Ist f eine alternierende n-Linearform und sind in $\eta_{j_1 j_2 \ldots j_n} = f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n})$ zwei Indizes gleich, $j_k = j_l$ für $k \neq l$, so ist $\eta_{j_1 j_2 \ldots j_n} = 0$.

In dem Ausdruck $\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \eta_{j_1 j_2 \ldots j_n} \cdot \xi_{j_1 1} \cdot \xi_{j_2 2} \cdots \xi_{j_n n}$ verschwinden für eine alternierende n-Linearform alle Summanden, in denen zwei Indizes j_k und j_l gleich sind. Je n verschiedenen Indizes $j_1, \ldots, j_n$ entspricht, wie oben bemerkt, eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Wir schreiben $\eta_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \eta_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)}$. Durchlaufen die $j_1, j_2, \ldots, j_n$ alle n-tupel voneinander verschiedener Zahlen, so durchläuft π alle Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$. Infolgedessen können wir die n Summen $\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n}$ durch eine einzige Summe ersetzen, wenn wir die Summanden durch Indizes unterscheiden, die nicht mehr wie bisher eine gewisse Menge von Zahlen durchlaufen, sondern die Menge $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Für eine alternierende n-Linearform schreiben wir

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \eta_{j_1 j_2 \ldots j_n} \cdot \xi_{j_1 1} \cdot \xi_{j_2 2} \cdots \xi_{j_n n} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \eta_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)} \cdot \xi_{\pi(1)1} \cdot \xi_{\pi(2)2} \cdots \xi_{\pi(n)n}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß für eine alternierende n-Linearform

$$\begin{aligned} \eta_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)} &= f(y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \ldots, y_{\pi(n)}) \\ &= \operatorname{sgn} \pi \cdot f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \eta_{12\ldots n} \end{aligned}$$

ist, und setzt man $\eta_{12\ldots n} = \eta$, so ergibt sich der Satz

VII. *Jede alternierende n-Linearform f auf einem n-dimensionalen linearen Vektorraum V läßt sich durch die Gleichung*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \eta \cdot \xi_{\pi(1)1} \cdot \xi_{\pi(2)2} \cdots \xi_{\pi(n)n} \tag{11}$$

als lineare Funktion in den Koordinaten $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni}$ der Vektoren x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aus V in bezug auf die Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ausdrücken. Dabei ist

$$\eta = f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Wir weisen noch auf einige Eigenschaften alternierender n-Linearformen hin:

VIII. *Ist* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ein n-tupel von Vektoren aus V und ist* $x_k = x'_k + \alpha x_l$ *für* $k \neq l$, *so gilt für jede alternierende n-Linearform f über V*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Häufig wird dieser Satz auch folgendermaßen ausgesprochen:

VIII'. *Addiert man in einem n-tupel von Vektoren aus V ein Vielfaches eines Vektors zu einem anderen, so ändert sich der Wert einer n-Linearform nicht.*

Zum Beweis beachten wir wie beim Beweis zum Satz VI die Linearität der n-Linearform f im k-ten Argument und erhalten

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha x_l, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Der zweite Summand verschwindet nach Satz VI.

Aus den Sätzen VI und VIII ergibt sich ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von n Vektoren aus V:

IX. *Die Vektoren* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *eines n-dimensionalen Vektorraumes V sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn es eine alternierende n-Linearform f gibt, für die* $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ *ist.*

Sind die Vektoren $y_1, y_2, \dots, y_n$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis des n-dimensionalen Vektorraumes V. Wir wählen $\eta \neq 0$ beliebig und definieren die alternierende n-Linearform f durch die Gleichung (11). Dann ist

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \eta \neq 0.$$

Sind die Vektoren $y_1, y_2, \dots, y_n$ linear abhängig, so ist einer von ihnen eine Linearkombination der übrigen: $y_k = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1} + \alpha_{k+1} y_{k+1} + \dots + \alpha_n y_n$. Addieren wir $(-\alpha_1) y_1$ zu y_k, dazu $(-\alpha_2) y_2$, dazu $(-\alpha_3) y_3$ usw., so ändert sich der Wert einer beliebigen alternierenden n-Linearform f nach Satz VIII' nicht, und wir erhalten schließlich

$$f(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_{k-1}, o, y_{k+1}, \dots, y_n).$$

Da $o = 0 y_l$ ein Vielfaches von y für jedes $l \neq k$ ist, verschwindet die rechte Seite in der obigen Gleichung.

4. DIE DETERMINANTE; BERECHNUNG DER DETERMINANTE

Nach den Vorbereitungen von Nr. 2 und 3 sind wir jetzt in der Lage, die Determinante zu definieren. Dazu betrachten wir eine reellwertige Funktion f auf der Menge $\mathscr{A}_{n,n}$ der n-reihigen quadratischen Matrizen: $f(A) \in R$. Da jede Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ durch ihre Spaltenmatrizen $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$ eindeutig bestimmt ist und umgekehrt diese als Vektoren aus $\hat{\mathscr{A}}_n$ eindeutig bestimmt, können wir f als reell-

wertige Funktion in n Veränderlichen auf dem Vektorraum $\hat{\mathscr{A}}_n$ auffassen:

$$f(A) = \hat{f}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n).$$

Den Begriff der *Determinante* definieren wir wie folgt:

Die *n-reihige Determinante* ist eine reellwertige Funktion auf der Menge $\mathscr{A}_{n,n}$ der quadratischen n-reihigen Matrizen, die als Funktion der Spalten eine alternierende n-Linearform auf $\hat{\mathscr{A}}_n$ ist und für die Einheitsmatrix den Wert 1 annimmt.

Wir bezeichnen die n-reihige Determinante mit det $|A|$ oder $\det_n |A|$ oder $\det_n |\alpha_{i'i}|$ oder ausführlich mit

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aus den Sätzen VI–IX von Nr. 3 erhalten wir eine Reihe von Aussagen über die n-reihige Determinante, die zur Berechnung ihres Wertes für eine gegebene Matrix nützlich sind.

X 1. *Vertauscht man in einer quadratischen Matrix zwei Spalten, so wechselt der Wert der Determinante das Vorzeichen.*

2. *Ist in der quadratischen Matrix eine Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ist der Wert der Determinante* 0.

3. *Addiert man in einer quadratischen Matrix ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen, so ist der Wert der Determinante für beide gleich.*

4. *Die Spalten einer quadratischen Matrix sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn der Wert der Determinante von Null verschieden ist.*

5. *Es gilt*

$$\det_n |\alpha_{i'i}| = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1)1} \cdot \alpha_{\pi(2)2} \cdots \alpha_{\pi(n)n}. \tag{12}$$

Die Aussagen 1, 2 und 3 ergeben sich unmittelbar aus den Sätzen VI, VII, VIII und der Tatsache, daß die Determinante eine alternierende n-Linearform der Spalten einer Matrix ist. Die Gleichung (12) folgt aus der Gleichung (11), wenn man in $\hat{\mathscr{A}}_n$ die kanonische Basis $\mathfrak{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ wählt. Die Koordinaten von $\hat{a}_i$ in bezug auf diese Basis sind $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$, während $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ die Spalten der Einheitsmatrix sind, so daß $\eta = 1$ ist. Die Aussage 4 folgt aus dem Beweis von Satz IX.

Als Beispiele berechnen wir den Wert der zweireihigen bzw. dreireihigen Determinante für eine gegebene Matrix.

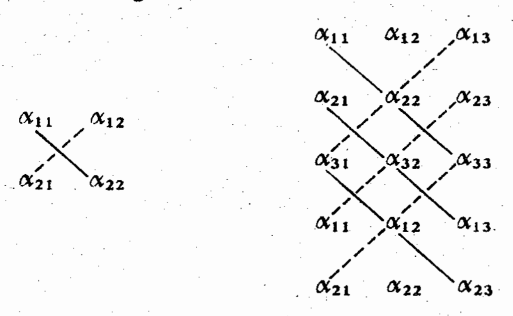
4⁰. Es sei $n = 2$. Die Gruppe $\mathfrak{S}_2$ besteht aus den beiden Permutationen ε, $\pi^{(1,2)} = \pi$, und es ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{\varepsilon(1)1} \cdot \alpha_{\varepsilon(2)2} - \alpha_{\pi(1)1} \cdot \alpha_{\pi(2)2} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}.$$

5°. Es sei $n = 3$. Die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ besteht aus 6 Permutationen: $\varepsilon, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ (vgl. 2°). Die Permutationen π_1, π_3, π_5 sind ungerade, die Permutationen $\varepsilon, \pi_2, \pi_4$ gerade. Damit erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{13} + \alpha_{31} \cdot \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{31} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{13} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{23}.$$

Die Berechnung der zwei- und dreireihigen Determinante läßt sich nach folgender Regel merken: Man schreibe die zwei- und dreireihigen Matrizen als quadratisches Schema auf und ergänze dieses im Fall dreireihiger Matrizen durch die ersten beiden Zeilen:



Die durch eine nicht gestrichelte Linie verbundenen Elemente multipliziere man miteinander und addiere die Produkte. Ebenso multipliziere man die durch eine gestrichelte Linie verbundenen Elemente und subtrahiere diese Produkte von den vorigen. Als Ergebnis erhält man den Wert der Determinante für die gegebene Matrix. Für den Fall dreireihiger Determinanten wird diese Methode *Sarrussche Regel* genannt.

Als nächstes beweisen wir, daß die n-reihige Determinante auch als eine alternierende n-Linearform in bezug auf die Zeilen der quadratischen n-reihigen Matrizen aufgefaßt werden kann, so daß alle Aussagen von Satz X richtig bleiben, wenn in ihnen überall das Wort „Spalte" durch „Zeile" ersetzt wird.

Wir betrachten die transponierte Matrix A^T einer gegebenen Matrix A und bemerken, daß die Spalten der transponierten Matrix mit den Zeilen der ursprünglichen Matrix übereinstimmen. Es gilt

$$\det |A^\mathsf{T}| = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}.$$

Wendet man auf die Indizes des Produktes $\alpha_{1\pi(1)} \cdot \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}$ die Permutation π^{-1} an, so erhält man die Gleichung

$$\alpha_{1\pi(1)} \cdot \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} = \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \cdot \alpha_{\pi^{-1}(2)2} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n}.$$

Dabei wird das kommutative Gesetz der Multiplikation der reellen Zahlen benutzt. Es ist demnach

$$\det |A^\mathsf{T}| = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \cdot \alpha_{\pi^{-1}(2)2} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n}.$$

Nun ist $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$, denn nach Satz V gilt $\operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} (\pi\pi^{-1}) = \operatorname{sgn} \varepsilon = 1$. Beachtet man schließlich, daß mit π auch π^{-1} alle Elemente von $\mathfrak{S}_n$ durchläuft, und wählt π^{-1} als neuen Summationsindex, so folgt

$$\det |A^{\mathsf{T}}| = \sum_{\pi^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} \cdot \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \cdot \alpha_{\pi^{-1}(2)2} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n} = \det |A|.$$

XI. *Für jede quadratische Matrix A ist der Wert der Determinante für die transponierte Matrix A^{T} gleich dem Wert der Determinante für die Matrix A*: $\det |A^{\mathsf{T}}| = \det |A|$.

Als Analogon der Gleichung (12) erhalten wir

$$\det |A| = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)}. \tag{12'}$$

In § 9, Nr. 7 haben wir ein Verfahren angegeben, um eine beliebige Matrix A auf Diagonalgestalt zu bringen. Damals haben wir dieses Verfahren zur Berechnung des Ranges von A benutzt. Des gleichen Verfahrens bedienen wir uns nun zur Berechnung des Wertes der Determinante für die quadratische Matrix A.

Ist $A = \|\alpha_{\iota'\iota}\|_{n,n}$ eine gegebene quadratische Matrix, so läßt sie sich in eine quadratische Diagonalmatrix $D = \|\alpha_{\iota'} \cdot \delta_{\iota'\iota}\|_{n,n}$ überführen, indem man folgende Schritte in geeigneter Reihenfolge mehrfach durchführt:

1. Vertauschung zweier Zeilen,
2. Vertauschung zweier Spalten,
3. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen,
4. Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.

Der Wert der Determinante für die Matrix A unterscheidet sich also von ihrem Wert für die Matrix D um den Faktor $(-1)^s$, wenn s die Anzahl der Schritte 1 und 2 bezeichnet, die bei der Durchführung des genannten Verfahrens in Anwendung kommen. Damit ist der Wert der Determinante $\det |A|$ berechnet, wenn man den Wert $\det |D|$ der Determinante für eine Diagonalmatrix berechnet hat.

Es sei $D = \|\alpha_{\iota'} \cdot \delta_{\iota'\iota}\|_{n,n}$ eine quadratische Diagonalmatrix. Dann ist

$$\det |D| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Da die Determinante als Funktion der Spalten linear ist und für die i-te Spalte $\hat{d}_i = \alpha_i \hat{e}_i$ gilt, ergibt sich

$$\det |D| = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Der Wert der Determinante für die Einheitsmatrix ist 1, und wir erhalten:

Der Wert der Determinante für eine Diagonalmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Bemerkung. Wie zur Bestimmung des Ranges einer Matrix genügt es auch zur Berechnung des Wertes der Determinante, durch mehrfache Anwendung der Operationen 1 – 4 in der gegebenen Matrix alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale zu Null zu machen. Der Wert der Determinante ist dann gleich dem Produkt der Diagonalelemente (vgl. die Bemerkung auf S. 99 sowie die Aufgabe 5 am Schluß dieses Paragraphen).

6°. Wir erläutern das genannte Verfahren zur Berechnung des Wertes der Determinante an einem Beispiel und betrachten die vierreihige quadratische Matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Man erhält

$$\det |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

durch Addition der mit -3 multiplizierten ersten Spalte zur zweiten, der mit -2 multiplizierten ersten Spalte zur dritten und der mit -1 multiplizierten ersten Spalte zur vierten Spalte. Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung ergibt sich durch Addition der mit -3 multiplizierten ersten Zeile zur zweiten, der mit -1 multiplizierten ersten Zeile zur dritten und der mit -2 multiplizierten ersten Zeile zur vierten Zeile. Es folgt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung der zweiten und vierten Spalte. Es ist[1])

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

---

[1]) Vgl. die oben stehende Bemerkung.

wie sich durch Addition der mit -1 multiplizierten zweiten Spalte zur dritten, der mit $-\frac{8}{3}$ multiplizierten zweiten Spalte zur vierten und der mit -1 multiplizierten dritten Spalte zur vierten Spalte ergibt. Damit ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-6) = 36.$$

Aus dem Satz X, Aussage 4, erhalten wir noch eine Aussage über den Rang einer quadratischen Matrix, wenn wir uns erinnern, daß der Rang einer Matrix die Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Spalten war:

XII. *Eine n-reihige quadratische Matrix A besitzt dann und nur dann den Rang n, d. h., sie ist dann und nur dann regulär, wenn der Wert ihrer Determinante von Null verschieden ist.*

5. UNTERDETERMINANTEN UND ADJUNKTE; ENTWICKLUNG DER DETERMINANTE; DIE CRAMERSCHE REGEL ZUR BERECHNUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME; DIE BERECHNUNG DER INVERSEN EINER REGULÄREN QUADRATISCHEN MATRIX

In diesem Abschnitt wird eine weitere Methode zur Berechnung des Wertes der Determinante angegeben. Später benutzen wir diese Methode, um die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der Determinante zu bestimmen.

Wir betrachten die Determinante als n-Linearform in den Spalten der n-reihigen quadratischen Matrizen und schreiben

$$\det|A| = \widehat{\det}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n).$$

Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine gegebene Matrix, so gilt für die Spalte mit dem Index j

$$\hat{a}_j = \alpha_{1j}\hat{e}_1 + \alpha_{2j}\hat{e}_2 + \cdots + \alpha_{nj}\hat{e}_n,$$

wobei $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ die kanonische Basis von $\hat{\mathscr{A}}_n$ bezeichnet. Aus der Linearität der Determinante als Funktion der j-ten Spalte erhalten wir

$$\widehat{\det}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_j, \hat{a}_{j+1}, \ldots, \hat{a}_n) = \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \widehat{\det}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{j-1}, \hat{e}_{j'}, \hat{a}_{j+1}, \ldots, \hat{a}_n).$$

Dabei ist $\widehat{\det}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{j-1}, \hat{e}_{j'}, \hat{a}_{j+1}, \ldots, \hat{a}_n) = \det |A^{(j',j)}|$, und die Matrix $A^{(j',j)}$ besitzt folgendes Aussehen

$$A^{(j',j)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & 0 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j'-1,1} & \cdots & \alpha_{j'-1,j-1} & 0 & \alpha_{j'-1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'-1,n} \\ \alpha_{j'1} & \cdots & \alpha_{j',j-1} & 1 & \alpha_{j',j+1} & \cdots & \alpha_{j'n} \\ \alpha_{j'+1,1} & \cdots & \alpha_{j'+1,j-1} & 0 & \alpha_{j'+1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & 0 & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Vertauschen wir in dieser Matrix die j-te Spalte nacheinander mit der $(j + 1)$-ten, der $(j + 2)$-ten Spalte usw., so erhalten wir nach $n - j$ Vertauschungen die Matrix

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{j'-1,1} & \cdots & \alpha_{j'-1,j-1} & \alpha_{j'-1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'-1,n} & 0 \\ \alpha_{j'1} & \cdots & \alpha_{j',j-1} & \alpha_{j',j+1} & \cdots & \alpha_{j'n} & 1 \\ \alpha_{j'+1,1} & \cdots & \alpha_{j'+1,j-1} & \alpha_{j'+1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 \end{Vmatrix}.$$

In dieser Matrix vertauschen wir die j'-te Zeile mit der $(j' + 1)$-ten, mit der $(j' + 2)$-ten Zeile usw. und erhalten nach $n - j'$ Vertauschungen die Matrix

$$A^{\langle j',j\rangle} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{j'-1,1} & \cdots & \alpha_{j'-1,j-1} & \alpha_{j'-1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'-1,n} & 0 \\ \alpha_{j'+1,1} & \cdots & \alpha_{j'+1,j-1} & \alpha_{j'+1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 \\ \alpha_{j'1} & \cdots & \alpha_{j',j-1} & \alpha_{j',j+1} & \cdots & \alpha_{j'n} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Der Wert der Determinante für die Matrix $A^{\langle j',j\rangle}$ unterscheidet sich von dem für die Matrix $A^{(j',j)}$ um den Faktor $(-1)^{(n-j)+(n-j')} = (-1)^{j+j'}$. Es gilt

$$\det |A^{\langle j',j\rangle}| = (-1)^{j+j'} \cdot \det |A^{(j',j)}|.$$

Um $\det |A^{\langle j',j\rangle}|$ zu berechnen, betrachten wir eine Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$, für die $\beta_{nn} = 1$ und $\beta_{i'n} = 0$ für $i' = 1, 2, \ldots, n - 1$ ist. Nach (12) gilt

$$\det |B| = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \beta_{\pi(1)1} \cdots \beta_{\pi(n-1)n-1} \cdot \beta_{\pi(n)n},$$

und in dieser Summe verschwinden alle Summanden, für die $\pi(n) \neq n$ ist. Die Summe ist also nur über diejenigen Permutationen π der Zahlen $1, 2, \ldots, n - 1, n$ zu erstrekken, die die Zahl n fest lassen: $\pi(n) = n$. Jeder derartigen Permutation entspricht

aber eine Permutation π' der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ und umgekehrt.[1]) Da ferner jede Inversion der Permutation π eine Inversion der Permutation π' definiert und umgekehrt, sind die Permutationen π und π' gleichzeitig gerade oder ungerade. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det_n |\beta_{i'i}| &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot \beta_{\pi(1)1} \cdots \beta_{\pi(n-1)n-1} \cdot \beta_{\pi(n)n} \\ &= \sum_{\pi'\in\mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi' \cdot \beta_{\pi'(1)1} \cdots \beta_{\pi'(n-1)n-1} \cdot \beta_{nn} \\ &= \sum_{\pi'\in\mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi' \cdot \beta_{\pi'(1)1} \cdots \beta_{\pi'(n-1)n-1} = \det_{n-1} |\beta_{i'i}|.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\det |A^{\langle j',j\rangle}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j'-1,1} & \cdots & \alpha_{j'-1,j-1} & \alpha_{j'-1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'-1,n} \\ \alpha_{j'+1,1} & \cdots & \alpha_{j'+1,j-1} & \alpha_{j'+1,j+1} & \cdots & \alpha_{j'+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Die durch

$$\det{}_{n-1}^{\langle j',j\rangle} |A| \underset{\text{Def.}}{=} \det |A^{\langle j',j\rangle}|$$

definierte Funktion nennen wir $\langle j',j\rangle$-*Unterdeterminante* oder $\langle j',j\rangle$-*Minor* und die Funktion

$$\det{}_{n-1}^{(j',j)} |A| \underset{\text{Def.}}{=} \det |A^{(j',j)}| = (-1)^{j+j'} \cdot \det{}_{n-1}^{\langle j',j\rangle} |A|$$

die (j',j)-*Adjunkte* der n-reihigen Determinante. Die folgenden Gleichungen lassen sich nun zur Berechnung des Wertes der n-reihigen Determinante verwenden:

$$\left.\begin{aligned}\det_n |A| &= \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det{}_{n-1}^{(j',j)} |A|, \\ \det_n |A| &= \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot (-1)^{j+j'} \cdot \det{}_{n-1}^{\langle j',j\rangle} |A|.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Gleichungen (14) werden die *Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte* genannt.

Die Bedeutung dieser Gleichungen liegt darin, daß sich die Werte der Unterdeterminanten nach (13) als Werte der $(n-1)$-reihigen Determinante berechnen lassen. Da wir die Werte der zweireihigen Determinante direkt angeben können, erhalten wir durch sukzessive Erniedrigung der Reihenzahl eine Möglichkeit zur Berechnung des Wertes der n-reihigen Determinante.

---

[1]) Vgl. die Überlegungen von Nr. 2.

7⁰. Wir betrachten als Beispiel abermals die in 6⁰ angegebene Matrix A.

$$\det|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Wenden wir die Gleichungen (14) für $j = 4$ an, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 1\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

und damit

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die in dieser Gleichung auftretenden dreireihigen Determinanten können wir nach der Sarrusschen Regel berechnen, oder wir wenden wieder die Gleichungen (14) an, und zwar bei der ersten und dritten Determinante für die dritte Spalte, bei der zweiten Determinante für die zweite Spalte. Dann ist

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(1\cdot 0 - 2\cdot 1) + 4\cdot(3\cdot 1 - 1\cdot 1),$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot(3\cdot 4 - 2\cdot 3) + 1\cdot(1\cdot 4 - 2\cdot 2) = -18,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(3\cdot 1 - 1\cdot 1) - 3\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot 3) = 10.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 18 + 20 = 36.$$

In Nr. 4 haben wir festgestellt, daß die Werte der Determinante für eine Matrix und ihre Transponierte übereinstimmen und daß folglich Zeilen und Spalten einer Matrix für die Berechnung des Wertes ihrer Determinante gleichberechtigt sind. Vertauschen wir in den obigen Überlegungen die Spalten mit den Zeilen, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \det_n |A| &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det_{n-1}^{(j',j)} |A|, \\ \det_n |A| &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot (-1)^{j+j'} \cdot \det_{n-1}^{\langle j',j\rangle} |A|. \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

In Analogie zu den Gleichungen (14) spricht man in diesem Fall von der *Entwicklung der Determinante nach der j'-ten Zeile.*

Es sei $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine quadratische Matrix. Wir betrachten zwei verschiedene Zahlen $j \neq k$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$ und ersetzen in der Matrix A die k-te Spalte durch die j-te Spalte. Die neu entstehende Matrix bezeichnen wir mit $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$. Dann ist

$$\beta_{i'i} = \alpha_{i'i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \beta_{i'k} = \alpha_{i'j}.$$

Die Matrix B besitzt zwei gleiche Spalten, und infolgedessen ist $\det|B| = 0$. Darüber hinaus ist $B^{(j',k)} = A^{(j',k)}$ diejenige Matrix, die man erhält, wenn die k-te Spalte $\hat{b}_k$ bzw. $\hat{a}_k$ durch die Spalte $\hat{e}_{j'}$ ersetzt wird. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\det_{n-1}^{(j',k)} |B| = \det_n |B^{(j',k)}| = \det_n |A^{(j',k)}| = \det_{n-1}^{(j',k)} |A|,$$

und aus den Gleichungen (14) für die Matrix B folgt

$$\det_n |B| = \sum_{j'=1}^{n} \beta_{j'k} \cdot \det_{n-1}^{(j',k)} |B| = \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det_{n-1}^{(j',k)} |A| = 0.$$

Für jede Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ gilt also

$$\sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det_{n-1}^{(j',k)} |A| = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k.$$

Eine entsprechende Gleichung läßt sich aus (14′) folgern, wenn man wiederum Zeilen und Spalten der betrachteten Matrix vertauscht. Zusammenfassend formulieren wir

den folgenden Satz:

XIII. *Die Werte der (k', k)-Adjunkten genügen den folgenden Gleichungen:*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det_{n-1}^{(j',k)} |A| &= \begin{cases} \det |A| & \text{für} \quad j = k, \\ 0 & \text{für} \quad j \neq k, \end{cases} \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \det_{n-1}^{(k',j)} |A| &= \begin{cases} \det |A| & \text{für} \quad j' = k', \\ 0 & \text{für} \quad j' \neq k'. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Gleichungen (15) lassen sich auf folgende Weise zur Berechnung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems verwenden. Es sei

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \xi_j \doteq \beta_{j'} \quad (j' = 1, \ldots, n)$$

ein quadratisches inhomogenes lineares Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix $A = \|\alpha_{l'l}\|_{n,n}$. Multiplizieren wir die zweite Serie der Gleichungen (15) mit $\beta_{k'}$, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \beta_{k'} \cdot \det_{n-1}^{(k',j)} |A| = \begin{cases} \beta_{j'} \cdot \det |A| & \text{für} \quad k' = j', \\ 0 & \text{für} \quad k' \neq j'. \end{cases}$$

Addieren wir diese Gleichungen über $k' = 1, 2, \ldots, n$ und vertauschen die Summation über j mit der über k', so ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \sum_{k'=1}^{n} \beta_{k'} \cdot \det_{n-1}^{(k',j)} |A| = \beta_{j'} \cdot \det |A| \quad (j' = 1, 2, \ldots, n).$$

Da die Matrix A als regulär vorausgesetzt war, ist der Wert ihrer Determinante von Null verschieden, und es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \sum_{k'=1}^{n} \beta_{k'} \cdot \det_{n-1}^{(k',j)} |A| \cdot (\det |A|)^{-1} = \beta_{j'} \quad (j' = 1, 2, \ldots, n).$$

Damit sind die Lösungen des gegebenen linearen Gleichungssystems berechnet. Es ist

$$\xi_j = \frac{\sum_{k'=1}^{n} \beta_{k'} \cdot \det_{n-1}^{(k',j)} |A|}{\det |A|} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Zähler dieses Ausdrucks läßt sich ebenfalls als Wert der n-reihigen Determinante für eine geeignete Matrix schreiben. Dazu betrachten wir die Matrix

$$\|\alpha_{l'l}, \beta_{l'}\|_{n,n}^{(j)} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \beta_1 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,j-1} & \beta_2 & \alpha_{2,j+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \beta_n & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

die aus der Koeffizientenmatrix A dadurch entsteht, daß die j-te Spalte $\mathfrak{a}_j$ durch die von den Elementen der rechten Seite des Gleichungssystems gebildete Spalte $\mathfrak{b}$ ersetzt wird. Aus der Gleichung (14) folgt dann

$$\det_n^{(j)} |\alpha_{l'l}, \beta_{l'}| \underset{\text{Def.}}{=} \det \left| \|\alpha_{l'l}, \beta_{l'}\|_{n,n}^{(j)} \right| = \sum_{j'=1}^{n} \beta_{j'} \cdot \det_{n-1}^{(j',j)} |A|,$$

und es gilt

$$\xi_j = \frac{\det_n^{(j)} |\alpha_{l'l}, \beta_{l'}|}{\det_n |\alpha_{l'l}|} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\xi_j = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \beta_1 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,j-1} & \beta_2 & \alpha_{2,j+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \beta_n & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Methode zur Berechnung der Lösungen eines inhomogenen quadratischen linearen Gleichungssystems mit regulärer Koeffizientenmatrix heißt *Cramersche Regel.*

XIV. *Die Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, \ldots, n)$$

mit quadratischer regulärer Koeffizientenmatrix erhält man in der Form

$$\xi_j = \frac{\det_n^{(j)} |\alpha_{i'i}, \beta_{i'}|}{\det_n |\alpha_{i'i}|}.$$

Die Cramersche Regel läßt sich zu einer Methode zur Berechnung der Lösungen eines beliebigen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq \beta_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n')$$

erweitern. Zunächst bestimme man den Rang r der Koeffizientenmatrix A. Dann vertausche man die Zeilen und Spalten der Koeffizientenmatrix, so daß die ersten r Zeilen und Spalten eine r-reihige reguläre quadratische Matrix bilden. Dies bedeutet eine Vertauschung der Gleichungen des gegebenen linearen Gleichungssystems sowie eine Umnumerierung der $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Ist das in § 10, Nr. 3 genannte Kriterium für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems erfüllt, so genügt es, die ersten r linear unabhängigen Gleichungen zu lösen. Man erhält ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_i \doteq \beta'_{i'} \quad (i' = 1, 2, \ldots, r).$$

Setzt man $\xi'_{r+1} = \tau_1, \ldots, \xi'_n = \tau_{n-r}$, so ist

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_i \doteq \beta'_{i'} - \alpha'_{i',r+1} \cdot \tau_1 - \cdots - \alpha'_{i'n} \cdot \tau_{n-r} \quad (i' = 1, 2, \ldots, r)$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit regulärer quadratischer Koeffizientenmatrix. Ist $\beta''_{i'} = \beta'_{i'} - \alpha'_{i',r+1} \cdot \tau_1 - \cdots - \alpha'_{i'n} \cdot \tau_{n-r}$, so lassen sich die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_i \doteq \beta''_{i'} \quad (i' = 1, \ldots, r)$$

nach der Cramerschen Regel berechnen. Die in die Lösungen eingehenden, durch das gegebene Gleichungssystem nicht bestimmten $\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ sind die Parameter der Lösungen.

Für ein homogenes lineares Gleichungssystem erhalten wir das folgende Kriterium über die Existenz nichttrivialer Lösungen:

XV. *Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit quadratischer Koeffizientenmatrix*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, \ldots, n)$$

besitzt dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet: $\det_n |\alpha_{i'i}| = 0$.

Zum Beweis verweisen wir auf § 10, Nr. 4 sowie auf den Satz XII.

Wir bemerken, daß wir in der zuletzt geschilderten Erweiterung der Cramerschen Regel nicht vorausgesetzt haben, daß das ursprüngliche Gleichungssystem inhomogen ist. Die angegebene Methode läßt sich auch in dem Fall, daß $\beta_1 = \cdots = \beta_{n'} = 0$ ist, anwenden.

8°. Als Beispiel lösen wir wieder das lineare Gleichungssystem aus § 10, Nr. 5, 3°:

$$\begin{aligned}
\xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 3\cdot\xi_5 &= 0,\\
2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 + 2\cdot\xi_4 + \xi_6 &= 1,\\
\xi_1 + \xi_2 + 2\cdot\xi_3 + \xi_4 + 9\cdot\xi_5 &= 1,\\
2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_5 + 2\cdot\xi_6 &= 0,\\
3\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_4 + 4\cdot\xi_5 + \xi_6 &= 0.
\end{aligned}$$

In der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems sind die Zeilen 1, 2, 3, 4 und die Spalten 1, 2, 5, 6 linear unabhängig. Um dies zu beweisen, berechnen wir den Wert der vierreihigen Determinante für die aus diesen Zeilen und Spalten gebildete Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 9 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6.$$

Wir setzen $\xi_1' = \xi_1$, $\xi_2' = \xi_2$, $\xi_3' = \xi_6$, $\xi_4' = \xi_5$, $\tau_1 = \xi_4$, $\tau_2 = \xi_3$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\xi_2' + 3\cdot\xi_4' &= 0 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2,\\
2\cdot\xi_2' + \xi_3' &= 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2,\\
\xi_1' + \xi_2' + 9\cdot\xi_4' &= 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2,\\
2\cdot\xi_1' + 2\cdot\xi_3' - 2\cdot\xi_4' &= 0.
\end{aligned}$$

Nach der Cramerschen Regel folgt

$$\xi_1' = \frac{\begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 0 & 3\\ 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 2 & 1 & 0\\ 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 9\\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}.$$

Der Wert der im Nenner stehenden Determinante ist -2. Wir berechnen den Wert der im Zähler stehenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 0 & 3\\ 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 2 & 1 & 0\\ 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 3 & 3\\ 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 2 & 1 & 0\\ 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 9 & 9\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 3\\ 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 2 & 1\\ 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 3\\ 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 2 & 1\\ 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5\\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -11$$

und erhalten $\xi_1' = -11$. Für ξ_2' ergibt sich

$$\xi_2' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & - & \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 - & \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 9 \\ 2 & & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-2}.$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 - 2\cdot\tau_1 - 4\cdot\tau_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -14 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & 2 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\tau_1 - 2\cdot\tau_2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt $\xi_2' = -6 - \tau_1 - 2\cdot\tau_2$. Die Berechnung von ξ_3' und ξ_4' überlassen wir dem Leser.

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich eine Möglichkeit zur Berechnung der inversen Matrix A^{-1} einer gegebenen regulären quadratischen Matrix A. In § 11, Nr. 3 haben wir bewiesen, daß jede reguläre quadratische Matrix eine Inverse besitzt. Bisher haben wir jedoch kein einfaches Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix angegeben. Wir betrachten die Gleichungen (15) und dividieren die zweite Serie dieser Gleichungen durch det $|A|$. Dies ist möglich, wenn wir voraussetzen, daß A eine reguläre quadratische Matrix ist. Wir erhalten

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \frac{\det_{n-1}^{(k',j)} |A|}{\det |A|} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k' = j', \\ 0 & \text{für} \quad k' \neq j'. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\beta_{jk'} = \frac{\det_{n-1}^{(k',j)} |A|}{\det |A|},$$

so können wir die linke Seite der obigen Gleichung in der Form $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \beta_{jk'}$ schreiben und als Element $\gamma_{j'k'}$ der Produktmatrix

$$\|\gamma_{i'i}\|_{n,n} = C = A \cdot B = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n} \cdot \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$$

auffassen. Nun ist aber

$$\gamma_{j'k'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'j} \cdot \beta_{jk'} = \delta_{j'k'}$$

($\delta_{j'k'}$ bezeichnet das Kronecker-Symbol), und es ist $C = E$ die Einheitsmatrix. Aus der Gleichung $A \cdot B = E$ folgt $B = A^{-1}$. Für die Elemente $\alpha_{j'j}^{(-1)} = \beta_{j'j}$ der zu A inversen Matrix A^{-1} gilt

$$\alpha_{j'j}^{(-1)} = \frac{\det_{n-1}^{(j,j')} |A|}{\det |A|} \quad (j, j' = 1, \ldots, n).$$

XVI. *Ist A eine reguläre quadratische Matrix, so ist*

$$A^{-1} = \left\| \frac{\det_{n-1}^{(j',j)} |A|}{\det |A|} \right\|^{\mathrm{T}}.$$

6. DER MULTIPLIKATIONSSATZ DER DETERMINANTE; DIE DETERMINANTE EINES LINEAREN OPERATORS; DIE CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG UND DIE CHARAKTERISTISCHE FUNKTION

In diesem Abschnitt beweisen wir den Multiplikationssatz der Determinante und behandeln einige damit im Zusammenhang stehende Fragen.

XVII (Multiplikationssatz der Determinante). *Sind A, B zwei quadratische n-reihige Matrizen, so gilt*

$$\det |A \cdot B| = \det |A| \cdot \det |B|.$$

Zum Beweis betrachten wir die Spalten der Produktmatrix $C = A \cdot B$. Es gilt

$$\hat{c}_i = \begin{Vmatrix} \gamma_{1i} \\ \vdots \\ \gamma_{ni} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \cdot \beta_{ji} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} \cdot \beta_{ji} \end{Vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_j \beta_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Spalten $\hat{c}_i$ der Produktmatrix C lassen sich als Linearkombinationen der Spalten der Matrix A schreiben. Berücksichtigen wir, daß die Determinante als Funktion der Spalten eine alternierende n-Linearform ist, so können wir uns der in Nr. 3 für alternierende n-Linearformen bewiesenen Gleichung (11) bedienen[1]):

$$\det |C| = \widehat{\det} (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_n) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \eta \cdot \beta_{\pi(1)1} \cdot \beta_{\pi(2)2} \cdots \beta_{\pi(n)n}.$$

Dabei ist $\eta = \widehat{\det} (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) = \det |A|$. Dann ist aber

$$\det |C| = \det |A| \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \beta_{\pi(1)1} \cdot \beta_{\pi(2)2} \cdots \beta_{\pi(n)n},$$

und wegen $\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \beta_{\pi(1)1} \cdot \beta_{\pi(2)2} \cdots \beta_{\pi(n)n} = \det |B|$ ist der Satz XVII bewiesen.

Wenden wir den Multiplikationssatz auf das Produkt einer regulären Matrix mit ihrer Inversen an, so erhalten wir

$$\det |A \cdot A^{-1}| = \det |A| \cdot \det |A^{-1}|.$$

---

[1]) Der Leser überzeuge sich, daß wir beim Beweis der Gleichung (11) lediglich davon Gebrauch gemacht haben, daß sich die Vektoren x_i als Linearkombinationen der Vektoren y_i darstellen ließen ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Da das Produkt $A \cdot A^{-1} = E$ die Einheitsmatrix und deren Determinante gleich 1 ist, folgt

$$\det |A| \cdot \det |A^{-1}| = 1 \quad \text{oder} \quad \det |A^{-1}| = (\det |A|)^{-1}.$$

XVIII. *Der Wert der Determinante für die Inverse A^{-1} einer regulären quadratischen Matrix A ist das Inverse des Wertes der Determinante für die ursprüngliche Matrix A:*

$$\det |A^{-1}| = (\det |A|)^{-1}.$$

Die letzten beiden Sätze geben uns die Möglichkeit, die Determinante als Funktion auf der Menge der linearen Operatoren $\mathscr{A}(V)$ des Vektorraumes V zu definieren. Ist $A \in \mathscr{A}(V)$ und $\mathfrak{B}$ eine Basis von V bezüglich der dem Operator A die quadratische Matrix A entspricht, so definieren wir

$$\det A \underset{\text{Def.}}{=} \det |A| \quad (= \det |\Phi_{\mathfrak{B}} A|). \tag{16}$$

Diese Definition ist von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$ unabhängig und folglich sinnvoll. Sind nämlich $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ zwei Basen des Vektorraumes V und bezeichnen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ die dem linearen Operator A bezüglich dieser Basen zugeordneten Matrizen, so gibt es eine reguläre Matrix B, so daß $A^{(2)} = B^{-1} \cdot A^{(1)} \cdot B$ ist (vgl. § 11, Nr. 6, Satz X). Dann ist aber

$$\det |A^{(2)}| = (\det |B|)^{-1} \cdot \det |A^{(1)}| \cdot \det |B| = \det |A^{(1)}|.$$

Im folgenden können wir von dem Wert der *Determinante für einen linearen Operator* sprechen.

Am Schluß des vorhergehenden Paragraphen haben wir auf die Bedeutung der Eigenwerte eines linearen Operators für die Strukturtheorie der linearen Operatoren hingewiesen. Wir haben dort festgestellt, daß eine reelle Zahl λ dann und nur dann Eigenwert eines linearen Operators A ist, wenn der Operator $A - \lambda E$ nicht regulär ist. Betrachten wir eine Basis $\mathfrak{B}$ des n-dimensionalen Vektorraumes V, auf dem der lineare Operator A definiert ist, so entspricht dem Operator $A - \lambda E$ die quadratische Matrix $A - \lambda E$, wenn dem Operator A die Matrix A entspricht. Ist $A - \lambda E$ nicht regulär, so ist die Matrix $A - \lambda E$ ebenfalls nicht regulär, und nach Satz XII ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $\det |A - \lambda E| = 0$ ist. Aus der Gleichung $\det (A - \lambda E) = \det |A - \lambda E|$ folgt der Satz

XIX. *Die reelle Zahl λ ist dann und nur dann ein Eigenwert des linearen Operators A, wenn sie der Gleichung*

$$\det (A - \lambda E) = 0 \tag{17}$$

genügt.

Die Gleichung (17) heißt die *charakteristische Gleichung des linearen Operators A.*

Ist A ein fester linearer Operator, so wird jeder reellen Zahl λ durch $\det(A - \lambda E)$ wiederum eine reelle Zahl zugeordnet. Wir erhalten eine reelle Funktion

$$f_A(x) \underset{\text{Def.}}{=} \det(A - xE),$$

die die *charakteristische Funktion des linearen Operators* A genannt wird und deren reelle Nullstellen die Eigenwerte des Operators A sind.

Entspricht die quadratische Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ dem linearen Operator A in bezug auf die feste Basis $\mathfrak{B}$, so ist

$$f_A(x) = \det_n |A - xE|,$$

und wir können die charakteristische Funktion des Operators A berechnen:

$$\det_n |A - xE| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot (\alpha_{\pi(1)1} - x \cdot \delta_{\pi(1)1}) \cdot (\alpha_{\pi(2)2} - x \cdot \delta_{\pi(2)2}) \cdots (\alpha_{\pi(n)n} - x \cdot \delta_{\pi(n)n}).$$

Ordnet man diese Summe nach Potenzen der Variablen x, so ergibt sich der Satz

XX. *Die charakteristische Funktion $f_A(x)$ eines linearen Operators A auf dem n-dimensionalen linearen Vektorraum V ist eine ganze rationale Funktion n-ten Grades in x:*

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot x^n + \beta_1 \cdot x^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} \cdot x + \beta_n. \tag{18}$$

Da eine ganze rationale Funktion höchstens n verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die verschiedenen reellen Nullstellen der charakteristischen Funktion aber das Spektrum des linearen Operators A bilden, folgt:

Das Spektrum eines linearen Operators $A \in \mathscr{A}(V)$ besteht höchstens aus n Zahlen.[1])

Ist A eine n-reihige quadratische Matrix, so nennt man die ganze rationale Funktion n-ten Grades $f_A(x) = \det_n |A - xE|$ die *charakteristische Funktion der Matrix A*. Die reellen Nullstellen der charakteristischen Funktion der Matrix A heißen die *Eigenwerte der Matrix A* und die Menge der verschiedenen Eigenwerte das *Spektrum der Matrix A*.

7. WEITERE METHODEN ZUR BERECHNUNG DER DETERMINANTE; DIE SCHURSCHE GLEICHUNG

Zum Schluß dieses Paragraphen betrachten wir einige weitere Methoden zur Berechnung der Determinante, die mit dem oben bewiesenen Multiplikationssatz zusammenhängen und in vielen Fällen von Nutzen sind. Es sei $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine quadratische Matrix, von der wir annehmen, daß sie mit

---

[1]) Wir erinnern den Leser daran, daß wir diese Aussage in § 11, Nr. 6 auf anderem Wege erhalten haben.

Hilfe einer ganzen Zahl $m < n$ in vier Teilmatrizen vom Typ (m, m), $(m, n-m)$, $(n-m, m)$ und $(n-m, n-m)$ zerlegt sei:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc:ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ \hdashline \alpha_{m+1,1} & \dots & \alpha_{m+1,m} & \alpha_{m+1,m+1} & \dots & \alpha_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|.$$

Die Teilmatrizen bezeichnen wir mit $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$:

$$A_{11} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{matrix} \right\|, \qquad A_{12} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

$$A_{21} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{m+1,1} & \dots & \alpha_{m+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{matrix} \right\|, \quad A_{22} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{m+1,m+1} & \dots & \alpha_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

und die ursprüngliche Matrix A schreiben wir in der Form

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Ist B ebenfalls eine n-reihige quadratische Matrix, die mit Hilfe der gleichen Zahl $m < n$ in vier Teilmatrizen $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ zerlegt wird, so gilt die Gleichung

$$A \cdot B = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{matrix} \right\|. \tag{19}$$

Mit diesen „Matrizen von Matrizen“ kann man also wie mit gewöhnlichen Matrizen rechnen. Den Beweis der Gleichung (19) erhält man unmittelbar, wenn man das Produkt $A \cdot B$ wieder in vier Teilmatrizen vom Typ (m, m), $(m, n-m)$, $(n-m, m)$ und $(n-m, n-m)$ zerlegt. Wir überlassen die Durchführung dem Leser als einfache Übung zur Matrizenmultiplikation.

Den Wert der Determinante für die in vier Teilmatrizen zerlegte Matrix A wollen wir nun durch die Werte der Determinante für die „kleineren“ Teilmatrizen zu bestimmen suchen. Zunächst betrachten wir eine Matrix der Form

$$\left\| \begin{matrix} E & A_{12} \\ O & E \end{matrix} \right\|,$$

wobei E die Einheitsmatrix vom Typ (m, m) bzw. $(n-m, n-m)$ und O die Nullmatrix vom Typ $(n-m, m)$ bezeichnet. Durch sukzessive Addition der mit $-\alpha_{ij}$ multiplizierten i-ten Spalte zu der j-ten Spalte ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) läßt sich diese Matrix in die Einheitsmatrix überführen, und es ist[1])

$$\det_n \begin{vmatrix} E & A_{12} \\ O & E \end{vmatrix} = 1.$$

Entsprechend gilt

$$\det_n \begin{vmatrix} E & O \\ A_{21} & E \end{vmatrix} = 1,$$

[1]) Vgl. auch die Aufgabe 5 am Schluß dieses Paragraphen.

da man die Matrix $\begin{Vmatrix} E & O \\ A_{21} & E \end{Vmatrix}$ aus einer Matrix der Form $\begin{Vmatrix} E & A_{12} \\ O & E \end{Vmatrix}$ durch Übergang zur transponierten Matrix erhält.

Es sei nun

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

eine wie oben in vier Teilmatrizen zerlegte Matrix. Ist die Teilmatrix A_{11} regulär, so multiplizieren wir die Matrix A von links mit der Matrix

$$\begin{Vmatrix} E & O \\ -A_{21} \cdot A_{11}^{-1} & E \end{Vmatrix}$$

und erhalten

$$\det_n |A| = \det_n \left\| \begin{Vmatrix} E & O \\ -A_{21} \cdot A_{11}^{-1} & E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \right\| = \det_n \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \end{vmatrix}.$$

Aus der Gleichung

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{11} & O \\ O & E \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E & O \\ O & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E & A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \\ O & E \end{Vmatrix}$$

folgt dann weiter

$$\det_n |A| = \det_n \begin{vmatrix} A_{11} & O \\ O & E \end{vmatrix} \cdot \det_n \begin{vmatrix} E & O \\ O & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir $\det_n \begin{vmatrix} A_{11} & O \\ O & E \end{vmatrix}$ sukzessive nach den letzten $n - m$ Spalten, so erhalten wir

$$\det_n \begin{vmatrix} A_{11} & O \\ O & E \end{vmatrix} = \det_m |A_{11}|,$$

und entsprechend gilt

$$\det_n \begin{vmatrix} E & O \\ O & A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \end{vmatrix} = \det_{n-m} |A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}|.$$

Zusammenfassend können wir sagen:

XXI. *Läßt sich die Matrix A so in vier Teilmatrizen $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ zerlegen, daß A_{11} quadratisch und regulär ist, so gilt*

$$\det_n \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{11}| \cdot \det_{n-m} |A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}|. \tag{20}$$

Ist $n = 2 \cdot m$, so erhalten wir durch abermalige Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinante die *Schursche Gleichung*

$$\det_{2 \cdot m} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{11} \cdot A_{22} - A_{11} \cdot A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}|. \tag{21}$$

Dabei ist A_{11} als reguläre m-reihige quadratische Matrix vorausgesetzt. Ist überdies die Matrix A_{11} mit A_{21} vertauschbar, d. h., gilt $A_{11} \cdot A_{21} = A_{21} \cdot A_{11}$, so ist $A_{11} \cdot A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} = A_{21} \cdot A_{12}$ und

$$\det_{2 \cdot m} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{11} \cdot A_{22} - A_{21} \cdot A_{12}|. \tag{22}$$

Ist A_{11} mit A_{12} vertauschbar, so erhalten wir aus der Gleichung $A_{11} \cdot A_{12} = A_{12} \cdot A_{11}$ durch Multiplikation mit A_{11}^{-1} von links und rechts $A_{12} \cdot A_{11}^{-1} = A_{11}^{-1} \cdot A_{12}$ und damit

$$A_{11} \cdot A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} = A_{11} \cdot A_{21} \cdot A_{12} \cdot A_{11}^{-1}.$$

Schreiben wir $A_{11} \cdot A_{22} = A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{11}) \cdot A_{11}^{-1}$, so folgt

$$\det_{2\cdot m}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{22} \cdot A_{11} - A_{21} \cdot A_{12}|. \qquad (22')$$

Die Gleichungen (22) und (22′) erinnern an die Berechnung einer zweireihigen Determinante. Wir weisen den Leser jedoch nachdrücklich darauf hin, daß diese Gleichungen nur dann gelten, wenn die Matrix A_{11} quadratisch und regulär und mit A_{21} bzw. A_{12} vertauschbar ist.

8. AUFGABEN

1. Die geraden Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bilden eine Gruppe. Diese Gruppe heißt die *alternierende Gruppe* und wird mit $\mathfrak{A}_n$ bezeichnet.

2.* Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ läßt sich als ein Produkt von Transpositionen darstellen, deren Anzahl gerade oder ungerade ist, je nachdem, ob π eine gerade oder eine ungerade Permutation ist.

3. Es gilt

$$\pi^{(k,l)} = \pi^{(l,k)} = (\pi^{(k,l)})^{-1}.$$

4.* Eine n-Linearform f auf dem n-dimensionalen Vektorraum V ist dann und nur dann alternierend, wenn für eine Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ von V folgendes gilt:

$$f(y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \ldots, y_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}\pi \cdot f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für jedes} \quad \pi \in \mathfrak{S}_n,$$

$$f(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n}) = 0, \quad \text{wenn} \quad j_k = j_l \quad \text{für} \quad k \neq l \quad \text{ist.}$$

5. Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine *Dreiecksmatrix*, d. h. $\alpha_{i'i} = 0$ für $i' = 2, 3, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, i' - 1$ oder $\alpha_{i'i} = 0$ für $i = 2, 3, \ldots, n$; $i' = 1, \ldots, i - 1$, so gilt $\det |A| = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$. Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$$

und

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}.$$

6.* Man berechne die *Vandermondesche Determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i).$$

7.* Ist $f_A(x) = (-1)^n \cdot x^n + \beta_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} \cdot x + \beta_n$ die charakteristische Funktion eines linearen Operators A auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so ist $\beta_n = \det A$. Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ eine quadratische Matrix, die dem linearen Operator A in bezug auf eine fest gewählte Basis $\mathfrak{B}$ von V entspricht, so ist $\beta_1 = (-1)^{n-1} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn})$. Besitzt der lineare Operator A n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so gilt $\beta_1 = (-1)^{n-1} \cdot (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

8. Man berechne die charakteristische Funktion und das Spektrum einer Diagonalmatrix und einer Dreiecksmatrix.

9. Läßt sich die Matrix A so in vier Teilmatrizen zerlegen, daß A_{22} eine m-reihige quadratische reguläre Matrix ist, so gilt

$$\det_n \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_{n-m} |A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}| \cdot \det_m |A_{22}|.$$

Ist $n = 2 \cdot m$, so gilt die zweite Schursche Gleichung

$$\det_{2 \cdot m} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{11} : A_{22} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \cdot A_{22}|.$$

Ist überdies die Matrix A_{22} mit A_{21} bzw. A_{12} vertauschbar, so gilt

$$\det_{2 \cdot m} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21}|$$

bzw.

$$\det_{2 \cdot m} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det_m |A_{22} \cdot A_{11} - A_{12} \cdot A_{21}|.$$

§ 14. BILINEARFORMEN UND QUADRATISCHE FORMEN

1. EINLEITUNG

Im letzten Paragraphen des zweiten Kapitels werden die sogenannten Bilinearformen oder 2-Linearformen auf einem n-dimensionalen Vektorraum untersucht. Die Bilinearformen stehen in engem Zusammenhang mit den quadratischen Formen. Die Theorie der quadratischen Formen ist für verschiedene Gebiete der Mathematik und Physik von großer Bedeutung. Sie dient in der Geometrie unter anderem zur Klassifikation der Kegelschnitte. In der Physik läßt sich z. B. die kinetische Energie eines mechanischen Systems als Wert einer quadratischen Form beschreiben. Die Untersuchung der Bilinearformen ist auch für die Theorie der linearen Vektorräume von großem Interesse, da sich die Isomorphismen zwischen einem linearen Vektorraum und seinem dualen Vektorraum zu den Bilinearformen in umkehrbar eindeutige Beziehung setzen lassen. Diese Beziehungen werden im dritten Kapitel benutzt, um die Länge eines Vektors und die Winkel zwischen zwei Vektoren zu definieren. Dadurch erhält man eine verfeinerte Theorie der linearen Vektorräume.

2. BILINEARFORMEN; QUADRATISCHE FORMEN; SYMMETRISCHE BILINEARFORMEN; SYMMETRISCHE MATRIZEN

Eine *Bilinearform* oder 2-*Linearform* auf dem linearen Vektorraum V ist eine reellwertige Funktion $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ in zwei Veränderlichen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, die in jedem Argument linear ist (vgl. § 13, Nr. 3). Ist V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum und

$\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ eine Basis von V, so läßt sich jede Bilinearform f als Funktion der Koordinaten $\xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}$ und $\xi_{12}, \ldots, \xi_{n2}$ der Vektoren x_1 und x_2 in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ schreiben:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} \cdot f(y_{i'}, y_i).$$

Fassen wir die Werte

$$f(y_{i'}, y_i) = \beta_{i'i} \quad (i, i' = 1, 2, \ldots, n)$$

zu einer quadratischen Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ zusammen, so erhalten wir den Satz

I. *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ eine Basis von V, so bestimmt jede Bilinearform f auf V eine quadratische Matrix*

$$B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n} = \|f(y_{i'}, y_i)\|_{n,n}.$$

Sind $\xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}; \xi_{12}, \ldots, \xi_{n2}$ die Koordinaten der Vektoren $x_1, x_2 \in V$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$, so gilt

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2}. \tag{1}$$

Umgekehrt definiert jede quadratische Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ durch die Gleichung (1) *eine Bilinearform auf dem Vektorraum V.*

Die Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ heißt die *Koeffizientenmatrix der Bilinearform f* in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$.

Es bleibt zu zeigen, daß die reellwertige Funktion, die bei gegebener Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ durch die rechte Seite der Gleichung (1) definiert wird, in jedem Argument linear ist. Dazu betrachten wir drei Vektoren $x_1, x_1', x_2 \in V$ mit den Koordinaten $\xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}; \xi_{11}', \ldots, \xi_{n1}'; \xi_{12}, \ldots, \xi_{n2}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$. Der Vektor $x_1 + x_1'$ besitzt dann die Koordinaten $\xi_{11} + \xi_{11}', \ldots, \xi_{n1} + \xi_{n1}'$, und es gilt

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_1', x_2) &= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot (\xi_{i'1} + \xi_{i'1}') \cdot \xi_{i2} \\ &= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} + \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1}' \cdot \xi_{i2}) \\ &= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} + \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1}' \cdot \xi_{i2} \\ &= f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2). \end{aligned}$$

Der Vektor αx besitzt die Koordinaten $\alpha \cdot \xi_{11}, \ldots, \alpha \cdot \xi_{n1}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1, x_2) &= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \alpha \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} \\ &= \alpha \cdot \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} = \alpha \cdot f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Damit ist die Linearität der durch (1) definierten Funktion im ersten Argument bewiesen, und entsprechend beweist man die Linearität im zweiten Argument.

Eine reellwertige Funktion q auf dem Vektorraum V heißt eine *quadratische Form*, wenn eine Bilinearform f auf V existiert, so daß

$$q(x) = f(x, x) \quad (x \in V) \tag{2}$$

gilt.

Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ eine Basis, so können wir den Wert der quadratischen Form q durch die Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ der Bilinearform f und die Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ wie folgt ausdrücken:

$$q(x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i. \tag{3}$$

Auf Grund der obigen Definition bestimmt jede Bilinearform auf dem Vektorraum V eine quadratische Form, jedoch können verschiedene Bilinearformen die gleiche quadratische Form definieren. Wir wollen unter allen Bilinearformen auf dem Vektorraum V eine Teilmenge so bestimmen, daß zwischen den Bilinearformen dieser Teilmenge und den quadratischen Formen eine umkehrbar eindeutige Beziehung besteht.

Eine Bilinearform f auf dem Vektorraum V heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x_1, x_2 \in V$

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1) \tag{4}$$

gilt.

Jeder Bilinearform f läßt sich eine symmetrische Bilinearform $f^{(s)}$ so zuordnen, daß f und $f^{(s)}$ die gleiche quadratische Form definieren. Dazu setzen wir für $x_1, x_2 \in V$

$$f^{(s)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot [f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)]. \tag{5}$$

Offensichtlich gilt $f^{(s)}(x_1, x_2) = f^{(s)}(x_2, x_1)$ sowie $f^{(s)}(x, x) = f(x, x)$, und wir haben zu zeigen, daß $f^{(s)}$ eine Bilinearform ist. Sind $x_1, x_1', x_2 \in V$, so gilt

$$\begin{aligned} f^{(s)}(x_1 + x_1', x_2) &= \frac{1}{2} \cdot [f(x_1 + x_1', x_2) + f(x_2, x_1 + x_1')] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2) + f(x_2, x_1) + f(x_2, x_1')] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)] + \frac{1}{2} \cdot [f(x_1', x_2) + f(x_2, x_1')] \\ &= f^{(s)}(x_1, x_2) + f^{(s)}(x_1', x_2). \end{aligned}$$

Ist $\alpha \in R$, so erhalten wir

$$f^{(s)}(\alpha \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{2} \cdot [f(\alpha \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + f(\boldsymbol{x}_2, \alpha \boldsymbol{x}_1)]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\alpha \cdot f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)] = \alpha \cdot f^{(s)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2).$$

Die Linearität im zweiten Argument beweist man entsprechend.

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf die symmetrischen Bilinearformen und beweisen den Satz

II. *Zwischen den symmetrischen Bilinearformen und den quadratischen Formen auf dem Vektorraum V besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung.*

Zunächst definiert jede symmetrische Bilinearform, die wir jetzt einfach mit f bezeichnen, eine quadratische Form q durch die Gleichung $q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Um zu zeigen, daß auch umgekehrt die symmetrische Bilinearform f durch die quadratische Form q bestimmt ist, betrachten wir zwei Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ und berechnen

$$q(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$$

$$= f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)$$

$$= q(\boldsymbol{x}_1) + q(\boldsymbol{x}_2) - 2 \cdot f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2).$$

Mit anderen Worten: Ist q die durch die symmetrische Bilinearform f definierte quadratische Form, so gilt

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{2} \cdot [q(\boldsymbol{x}_1) + q(\boldsymbol{x}_2) - q(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)]. \tag{6}$$

Damit ist der Satz II bewiesen.

Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$, so genügen die Elemente $\beta_{i'i}$ der Koeffizientenmatrix B einer symmetrischen Bilinearform der Gleichung

$$\beta_{i'i} = f(\boldsymbol{y}_{i'}, \boldsymbol{y}_i) = f(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_{i'}) = \beta_{ii'} \quad (i, i' = 1, 2, \ldots, n).$$

Für die Matrix B gilt

$$B^{\mathrm{T}} = B. \tag{7}$$

Eine quadratische Matrix, die der Gleichung (7) genügt, heißt *symmetrisch*. Die Koeffizientenmatrix einer symmetrischen Bilinearform ist eine symmetrische Matrix.

Ist umgekehrt $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ eine symmetrische Matrix und betrachten wir die durch B vermöge (1) definierte Bilinearform

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2},$$

so gilt

$$\sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1}^{n} \beta_{ii'} \cdot \xi_{i2} \cdot \xi_{i'1} = f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1),$$

und f ist eine symmetrische Bilinearform.

III. *Die Bilinearform f auf dem n-dimensionalen Vektorraum V ist dann und nur dann symmetrisch, wenn ihre Koeffizientenmatrix B symmetrisch ist.*

Aus den Sätzen II und III folgt

IV. *Ist q eine quadratische Form auf dem n-dimensionalen Vektorraum V und $\mathfrak{B}$ eine Basis von V, so gibt es genau eine symmetrische Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$, so daß*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i \tag{3}$$

ist. Dabei sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$.
Ist umgekehrt $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ eine symmetrische Matrix, so wird durch die Gleichung (3) *eine quadratische Form q auf dem Vektorraum V definiert.*

Die symmetrische Matrix $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ heißt die *Koeffizientenmatrix der quadratischen Form q* in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$.

3. DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER KOEFFIZIENTENMATRIX EINER BILINEARFORM; DIE NORMALFORM SYMMETRISCHER BILINEARFORMEN UND QUADRATISCHER FORMEN; RANG UND SIGNATUR; DER TRÄGHEITSSATZ VON SYLVESTER; DEFINITE UND INDEFINITE QUADRATISCHE FORMEN

Die Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V lassen sich nach Wahl einer Basis in V durch quadratische Matrizen beschreiben. Betrachten wir dieses Ergebnis von Nr. 2, so erhebt sich die Frage nach dem Verhalten dieser Matrizen beim Übergang von einer Basis zu einer neuen. Wir untersuchen die Frage nach dem Transformationsverhalten der Koeffizientenmatrix einer Bilinearform beim Übergang zu einer neuen Basis für beliebige Bilinearformen f auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Mit $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ bezeichnen wir zwei Basen von V. Die Koeffizientenmatrizen der Bilinearform f in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ seien $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ und $C = \|\gamma_{i'i}\|_{n,n}$. Dann ist

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i'i} \cdot \eta_{i'1} \cdot \eta_{i2},$$

wenn $\xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}; \xi_{12}, \ldots, \xi_{n2}$ und $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}; \eta_{12}, \ldots, \eta_{n2}$ die Koordinaten der Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ bezeichnen. Ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ die reguläre quadratische Matrix, mit deren Hilfe sich die Elemente der Basis $\mathfrak{B}_2$ durch die Basis $\mathfrak{B}_1$ ausdrücken lassen, so gilt

$$z_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

und

$$\xi_{i'\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_{i\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2;\ i' = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen

$$\beta_{i'i} = f(y_{i'}, y_i) \quad \text{und} \quad \gamma_{i'i} = f(z_{i'}, z_i),$$

so folgt aus (8)

$$\gamma_{i'i} = f(z_{i'}, z_i) = f\left(\sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'i'} y_{j'}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} y_j\right) = \sum_{j'=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'i'} \cdot f(y_{j'}, y_j) \cdot \alpha_{ji}$$

oder

$$\gamma_{i'i} = \sum_{j'=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j'i'} \cdot \beta_{j'j} \cdot \alpha_{ji}. \tag{10}$$

Die Gleichung (10), die den Zusammenhang zwischen den Koeffizientenmatrizen B und C beschreibt, läßt sich als Matrizengleichung schreiben:

$$C = A^{\mathrm{T}} \cdot B \cdot A, \tag{10'}$$

und wir erhalten das *Transformationsgesetz der Koeffizientenmatrix einer Bilinearform beim Übergang zu einer neuen Basis.*

V. *Ist f eine Bilinearform auf dem n-dimensionalen Vektorraum V und ist*

$$f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i'i} \cdot \eta_{i'1} \cdot \eta_{i2},$$

so gibt es eine reguläre Matrix A, so daß

$$C = A^{\mathrm{T}} \cdot B \cdot A \tag{10'}$$

und

$$\xi_{i'\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_{i\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2;\ i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

gilt.

Aus §9, Nr. 6, Satz X folgt $r(C) = r(B)$, da A eine quadratische reguläre Matrix ist, und wir erhalten den Satz

VI. *Alle Koeffizientenmatrizen einer Bilinearform f haben den gleichen Rang r.*

Die Zahl r nennen wir den *Rang der Bilinearform f.*

Die Frage ist, ob man eine Basis des linearen Vektorraumes V so bestimmen kann, daß die Koeffizientenmatrix einer gegebenen Bilinearform besonders einfach wird. Ist f speziell eine symmetrische Bilinearform, so können wir diese Frage im Hinblick auf die Gleichung (10') auch so formulieren: Gibt es zu jeder symmetrischen Matrix B eine reguläre Matrix A, so daß die symmetrische Matrix $C = A^{\mathsf{T}} \cdot B \cdot A$ eine besonders einfache Form besitzt?

Wir betrachten eine symmetrische Bilinearform f und nehmen an, daß $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ die Koeffizientenmatrix von f in bezug auf eine gegebene Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ sei. Ist $B = O$, so besitzt B offenbar eine besonders einfache Form. Wir setzen also voraus, daß B nicht die Nullmatrix ist, und unterscheiden zwei Fälle:

a) Es gibt einen Index i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq n)$, so daß

$$\beta_{i_0 i_0} = f(y_{i_0}, y_{i_0}) \neq 0$$

ist. Dann setzen wir

$$y_1^{(1)} = y_{i_0}; \quad y_{i_0}^{(1)} = y_1 + \alpha_{i_0} y_1^{(1)}; \quad y_i^{(1)} = y_i + \alpha_i y_1^{(1)} \quad \text{für} \quad i \neq 1, i_0;$$

$$\beta_1 = \beta_{i_0 i_0} = f(y_1^{(1)}, y_1^{(1)}).$$

Die Koeffizienten α_i $(i = 2, \ldots, n)$ wählen wir so, daß

$$\beta_{1i}^{(1)} = f(y_1^{(1)}, y_i^{(1)}) = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)$$

ist. Dies ist möglich, denn für $i = 2, \ldots, n$ und $i \neq i_0$ gilt

$$f(y_1^{(1)}, y_i^{(1)}) = f(y_{i_0}, y_i + \alpha_i y_{i_0}) = \beta_{i_0 i} + \alpha_i \cdot \beta_1,$$

und für $i = i_0$ ist

$$f(y_1^{(1)}, y_{i_0}^{(1)}) = f(y_{i_0}, y_1 + \alpha_{i_0} y_{i_0}) = \beta_{i_0 1} + \alpha_{i_0} \cdot \beta_1.$$

Wir erhalten eine neue Basis $\mathfrak{B}^{(1)} = \{y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\}$.[1]) Die Koeffizientenmatrix $B^{(1)} = \|\beta_{i'i}^{(1)}\|_{n,n}$ der Form f in bezug auf die neue Basis hat folgende vereinfachte Gestalt:

$$B^{(1)} = \left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_{22}^{(1)} & \ldots & \beta_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \beta_{n2}^{(1)} & \ldots & \beta_{nn}^{(1)} \end{matrix} \right\| \quad (\beta_1 \neq 0). \tag{11}$$

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten eines Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ und $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}$ seine Koordinaten in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{(1)}$, so gilt

$$\xi_1 = \xi_{i_0}^{(1)}, \ \xi_{i_0} = \xi_1^{(1)} + \alpha_2 \cdot \xi_2^{(1)} + \cdots + \alpha_n \cdot \xi_n^{(1)}; \ \ \xi_i = \xi_i^{(1)} \quad \text{für} \quad i \neq 1, i_0.$$

[1]) Der Leser überzeuge sich, daß die Vektoren $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ linear unabhängig sind.

b) Sind alle $\beta_{ii} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), so gibt es Indizes i_0, j_0 ($1 \leqq i_0, j_0 \leqq n$), so daß

$$\beta_{i_0 j_0} = f(y_{i_0}, y_{j_0}) \neq 0$$

ist. In diesem Fall setzen wir

$$y_1^{(1)} = y_{i_0} + y_{j_0}, \quad y_{i_0}^{(1)} = y_1 + \alpha_{i_0} y_1^{(1)}; \quad y_i^{(1)} = y_i + \alpha_i y_1^{(1)} \quad \text{für} \quad i \neq 1, i_0;$$

$$\beta_1 = f(y_1^{(1)}, y_1^{(1)}).$$

Es ist

$$\beta_1 = f(y_1^{(1)}, y_1^{(1)}) = f(y_{i_0} + y_{j_0}, y_{i_0} + y_{j_0}) = 2f(y_{i_0}, y_{j_0}) \neq 0.$$

Die Koeffizienten α_i ($i = 2, \ldots, n$) wählen wir so, daß

$$\beta_{1i}^{(1)} = f(y_1^{(1)}, y_i^{(1)}) = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)$$

ist. Dies ist möglich, denn für $i = 2, \ldots, n$ und $i \neq i_0$ gilt

$$f(y_1^{(1)}, y_i^{(1)}) = f(y_1^{(1)}, y_i + \alpha_i y_1^{(1)}) = f(y_1^{(1)}, y_i) + \alpha_i \cdot \beta_1,$$

und für $i = i_0$ ist

$$f(y_1^{(1)}, y_{i_0}^{(1)}) = f(y_1^{(1)}, y_1 + \alpha_{i_0} y_1^{(1)}) = f(y_1^{(1)}, y_1) + \alpha_{i_0} \cdot \beta_1.$$

Wie im Fall a) erhalten wir eine neue Basis $\mathfrak{B}^{(1)} = \{y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\}$[1]), und die Koeffizientenmatrix $B^{(1)} = \|\beta_{i'i}^{(1)}\|_{n,n}$ der Form f besitzt in bezug auf die neue Basis die durch die Gleichung (11) beschriebene Gestalt.

Werden die Koordinaten eines Vektors x in bezug auf die Basen $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(1)}$ wiederum mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bzw. $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}$ bezeichnet, so gilt

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_{i_0}^{(1)}, \\
\xi_{i_0} &= \xi_1^{(1)} + \alpha_2 \cdot \xi_2^{(1)} + \cdots + \alpha_{i_0} \cdot \xi_{i_0}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \cdot \xi_n^{(1)}, \\
\xi_{j_0} &= \xi_1^{(1)} + \alpha_2 \cdot \xi_2^{(1)} + \cdots + (1 + \alpha_{j_0}) \cdot \xi_{j_0}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \cdot \xi_n^{(1)}; \\
\xi_i &= \xi_i^{(1)} \quad \text{für} \quad i \neq 1, i_0, j_0.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Matrix $B^{(1)}$. Sind in dieser Matrix nicht alle $\beta_{i'i}^{(1)} = 0$, so setzen wir $y_1^{(2)} = y_1^{(1)}$ und wenden auf die übrigen $n - 1$ Basisvektoren $y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ wiederum die unter a) oder b) beschriebenen Umformungen an. Wir erhalten eine Basis $\mathfrak{B}^{(2)} = \{y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}\}$. Die Basisvektoren $y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}$ sind Linearkombinationen der Basisvektoren $y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$, und aus den Gleichungen $f(y_1^{(1)}, y_i^{(1)}) = 0$ ($i = 2, \ldots, n$) folgt wegen der Linearität der Funktion f im zweiten Argument $f(y_1^{(2)}, y_i^{(2)}) = 0$ ($i = 2, \ldots, n$). Mit $B^{(2)} = \|\beta_{i'i}^{(2)}\|_{n,n}$ bezeichnen wir die der Form f in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{(2)}$ zugeordnete Koeffizientenmatrix. Es ist $\beta_{1i}^{(2)} = 0$ für

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 188.

$i = 2, \ldots, n$, und nach Konstruktion der neuen Basis gilt überdies

$$\beta_{2j}^{(2)} = f(y_2^{(2)}, y_j^{(2)}) = 0 \quad (j = 3, \ldots, n).$$

Die Matrix $B^{(2)}$ besitzt die Form

$$B^{(2)} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33}^{(2)} & \ldots & \beta_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{n3}^{(2)} & \ldots & \beta_{nn}^{(2)} \end{Vmatrix} \quad (\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0). \tag{12}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt schließlich zu einer Basis $\mathfrak{B}^{(r)} = \{y_1^{(r)}, \ldots, y_n^{(r)}\}$, bezüglich der die Koeffizientenmatrix $B^{(r)} = \|\beta_{i'i}^{(r)}\|_{n,n}$ der Form f folgende Gestalt hat:

$$B^{(r)} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \quad (\beta_1 \neq 0, \ldots, \beta_r \neq 0). \tag{13}$$

Es gilt

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \cdot \xi_{i1}^{(r)} \cdot \xi_{i2}^{(r)},$$

und aus dem Satz V folgt:

VII. *Ist f eine symmetrische Bilinearform*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2},$$

so gibt es eine reguläre Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$, so daß für

$$\eta'_{i'\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2;\ i' = 1, \ldots, n)$$

die Beziehung

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \cdot \eta'_{i1} \cdot \eta'_{i2} \tag{14}$$

gilt.

Zu jeder symmetrischen Matrix B gibt es eine reguläre quadratische Matrix A_1, so daß

$$A_1^{\mathsf{T}} \cdot B \cdot A_1 = B^{(r)} \quad (A_1 = A^{-1}) \tag{15}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Die symmetrische Bilinearform f besitzt den Rang r.

Berücksichtigen wir, daß die Diagonalelemente $\beta_1, \ldots, \beta_r$ der Matrix $B^{(r)}$ reelle Zahlen sind, so können wir die Matrix $B^{(r)}$ noch weiter vereinfachen.[1] Zunächst nehmen wir an, daß die Numerierung der Basiselemente $y_1^{(r)}, \ldots, y_n^{(r)}$ so gewählt sei, daß die reellen Zahlen β_i $(i = 1, \ldots, r)$ nach der Größe geordnet sind:

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_p > 0 > \beta_{p+1} \geqq \cdots \geqq \beta_r.$$

Dann setzen wir

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i}} y_i^{(r)} \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{-\beta_i}} y_i^{(r)} \qquad (i = p + 1, \ldots, r),$$

$$z_i = y_i^{(r)} \qquad (i = r + 1, \ldots, n).$$

In bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{[N]} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ besitzt die Koeffizientenmatrix $B^{[N]}$ der Form f die Gestalt

$$B^{[N]} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \underset{p}{0} & 0 & \ldots & \underset{r}{0} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

und für die Bilinearform f können wir schreiben:

$$f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \sum_{i=1}^{p} \eta_{i1} \cdot {}_{2} - \sum_{i=p+1}^{r} \eta_{i1} \cdot \eta_{i2}. \tag{17}$$

Dabei ist

$$\eta_{i\varkappa} = \begin{cases} \sqrt{\beta_i} \cdot \eta'_{i\varkappa} & \text{für } i = 1, \ldots, p, \\ \sqrt{-\beta_i} \cdot \eta'_{i\varkappa} & \text{für } i = p + 1, \ldots, r, \\ \eta'_{i\varkappa} & \text{für } i = r + 1, \ldots, n \quad (\varkappa = 1, 2). \end{cases}$$

---

[1]) Im folgenden wird immer wieder davon Gebrauch gemacht, daß für die reellen Zahlen eine Ordnung $\leqq$ erklärt ist. Die abgeleiteten Sätze gelten also nicht für Vektorräume über einem beliebigen Körper K.

Die Matrix $B^{[N]}$ heißt die *Normalform der symmetrischen Matrix B in bezug auf das Transformationsgesetz* (10'). Die durch die Gleichung (17) gegebene Darstellung der symmetrischen Bilinearform f wird *Normalform der symmetrischen Bilinearform f* genannt, und die Basis $\mathfrak{B}^{[N]}$ heißt eine *Normalbasis für die symmetrische Bilinearform f*.

VIII. *Ist f eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so gibt es eine Normalbasis* $\mathfrak{B}^{[N]} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *von V, so daß f die Normalform*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{p} \eta_{i1} \cdot \eta_{i2} - \sum_{i=p+1}^{r} \eta_{i1} \cdot \eta_{i2} \tag{17}$$

besitzt. Ist $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *eine beliebige Basis von V und*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'1} \cdot \xi_{i2},$$

so gibt es eine reguläre quadratische Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$, *so daß*

$$B^{[N]} = A^{\mathsf{T}} \cdot B \cdot A,$$

$$z_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} y_{i'} \quad \text{und} \quad \xi_{i'\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_{i\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2; \, i, i' = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Betrachten wir an Stelle der symmetrischen Bilinearform f die ihr umkehrbar eindeutig zugeordnete quadratische Form q, so können wir den Satz VIII entsprechend für quadratische Formen formulieren:

VIII'. *Ist q eine quadratische Form auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so gibt es eine Normalbasis* $\mathfrak{B}^{[N]} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *von V, so daß q die Normalform*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} \eta_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \eta_i^2 \tag{18}$$

besitzt. Ist $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *eine beliebige Basis von V und*

$$q(x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i,$$

so gibt es eine reguläre quadratische Matrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$, *so daß*

$$B^{[N]} = A^{\mathsf{T}} \cdot B \cdot A,$$

$$z_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} y_{i'} \quad \text{und} \quad \xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \eta_i \quad (i, i' = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Die durch die quadratische Form q eindeutig bestimmte Zahl r (vgl. Satz VI) wird der *Rang der quadratischen Form* genannt. Die Zahl p heißt der *Trägheitsindex der Form q*, und die Zahl $s = 2p - r$, d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der

positiven und negativen Quadrate in der Normalform (16), wird die *Signatur der quadratischen Form q* genannt.

Um diese Definitionen zu rechtfertigen, muß man nachweisen, daß die Zahlen p oder s nicht von dem oben beschriebenen Verfahren, sondern, wie der Rang r, nur von der quadratischen Form selbst abhängen. Dies ist der Inhalt des *Trägheitssatzes von Sylvester*:

IX. *Rang und Signatur sind durch die quadratische Form q eindeutig bestimmt.*

Zunächst bemerken wir, daß durch den Rang r und die Signatur s auch der Trägheitsindex $p = \frac{r+s}{2}$ bestimmt ist, während umgekehrt der Rang und der Trägheitsindex p die Signatur $s = 2p - r$ bestimmen.

Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{B}^{[N]} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ und $\mathfrak{B}'^{[N]} = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ zwei Normalbasen für die gegebene quadratische Form q sind, so daß wir q folgendermaßen darstellen können:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{p'} \xi_i'^2 - \sum_{i=p'+1}^{r'} \xi_i'^2.$$

Aus Satz VI folgt zunächst, daß $r' = r$ ist, und wir nehmen an, es sei $p' \neq p$, etwa $p' < p$. Ist

$$z_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} z'_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so ist

$$\xi'_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \quad (i' = 1, \ldots, n),$$

und $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ ist eine reguläre Matrix. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i \doteq 0 \quad (i' = 1, \ldots, p'),$$
$$\xi_i \doteq 0 \quad (i = p+1, \ldots, n),$$

das aus $n - p + p'$ Gleichungen besteht. Da $n - p + p' < n$ ist, besitzt dieses homogene lineare Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}$. Für wenigstens ein i $(1 \leqq i \leqq p')$ ist $\xi_i^{(0)} \neq 0$, und es ist $\xi_{p+1}^{(0)} = \cdots = \xi_n^{(0)} = 0$. Setzen wir

$$\xi_{i'}'^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_i^{(0)} \qquad (i' = 1, \ldots, n),$$

so ist $\xi_1'^{(0)} = \cdots = \xi_{p'}'^{(0)} = 0$, und für den Vektor

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(0)} z_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^{(0)} z'_i$$

erhalten wir

$$q(x_0) = (\xi_1^{(0)})^2 + \cdots + (\xi_p^{(0)})^2 > 0$$

und

$$q(x_0) = -(\xi_{p'+1}^{\prime(0)})^2 - \cdots - (\xi_r^{\prime(0)})^2 \leqq 0.$$

Durch diesen Widerspruch ist der Satz IX bewiesen.

Sind alle Werte der quadratischen Form q nicht negativ, so heißt die Form q *positiv semidefinit*. Ist sogar $q(x) > 0$ für alle $x \neq o$, so heißt die Form q *positiv definit*. Sind alle Werte der quadratischen Form q nicht positiv, so heißt die Form q *negativ semidefinit*. Ist $q(x) < 0$ für alle $x \neq o$, so heißt die Form q *negativ definit*. Eine quadratische Form q, die sowohl negative, als auch positive Werte annimmt, heißt *indefinit*. Eine quadratische Form heißt *nicht ausgeartet*, wenn ihre Koeffizientenmatrix regulär ist.

Berücksichtigen wir die im Satz VIII′ angegebene Normalform einer quadratischen Form, so erhalten wir:

X. *Die quadratische Form q ist dann und nur dann positiv definit, wenn $p = r = n$, d. h. $s = n$ ist.*

Die quadratische Form q ist dann und nur dann positiv semidefinit, wenn $p = r$, d. h. $s = r$ ist.

Die quadratische Form q ist dann und nur dann negativ definit, wenn $p = 0$ und $r = n$, d. h. $s = -n$ ist.

Die quadratische Form q ist dann und nur dann negativ semidefinit, wenn $p = 0$, d. h. $s = -r$ ist.

Eine positiv definite oder negativ definite quadratische Form ist nicht ausgeartet.

1°. Als Beispiel betrachten wir die quadratische Form q, die auf einem dreidimensionalen Vektorraum V in bezug auf eine Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, y_3\}$ durch die Gleichung

$$q(x) = \xi_1^2 - 2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + 6 \cdot \xi_1 \cdot \xi_3 + \xi_2^2 - 4 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 + 9 \cdot \xi_3^2$$

gegeben ist. Die zugehörige Koeffizientenmatrix B besitzt die Form

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Es ist $\beta_{11} = 1$, wir setzen

$$y_1^{(1)} = y_1,\ y_2^{(1)} = y_2 + \alpha_2 y_1^{(1)},\ y_3^{(1)} = y_3 + \alpha_3 y_1^{(1)}; \quad \beta_1 = 1$$

und bestimmen die Koeffizienten α_2, α_3 aus den Gleichungen

$$\beta_{12} + \alpha_2 \cdot \beta_1 = -1 + \alpha_2 = 0, \quad \beta_{13} + \alpha_3 \cdot \beta_1 = 3 + \alpha_3 = 0.$$

Für die Koordinaten $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}$ des Vektors x in bezug auf die neue Basis $\mathfrak{B}^{(1)} = \{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}\}$ erhalten wir

$$\xi_1 = \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} - 3 \cdot \xi_3^{(1)}, \quad \xi_2 = \xi_2^{(1)}, \quad \xi_3 = \xi_3^{(1)},$$

und für die Form q ergibt sich

$$q(x) = (\xi_1^{(1)})^2 + 2 \cdot \xi_2^{(1)} \cdot \xi_3^{(1)}.$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix $B^{(1)}$ besitzt die Form

$$B^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Wir setzen $y_1^{(2)} = y_1^{(1)}$, $y_2^{(2)} = y_2^{(1)} + y_3^{(1)}$, $y_3^{(2)} = y_3^{(1)} + \alpha y_2^{(2)}$ und bestimmen α aus der Gleichung

$$f(y_2^{(2)}, y_3^{(2)}) = f(y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) + f(y_3^{(1)}, y_3^{(1)}) + \alpha \cdot f(y_2^{(2)}, y_2^{(2)}) = 0.$$

Es ist

$$f(y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) = \beta_{23}^{(1)} = 1, \quad f(y_3^{(1)}, y_3^{(1)}) = \beta_{33}^{(1)} = 0$$

und

$$\beta_2 = f(y_2^{(2)}, y_2^{(2)}) = 2 \cdot \beta_{23}^{(1)} = 2.$$

Für die Koordinaten $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}$ des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{(2)} = \{y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)}\}$ gilt

$$\xi_1^{(1)} = \xi_1^{(2)}, \quad \xi_2^{(1)} = \xi_2^{(2)} - \tfrac{1}{2} \cdot \xi_3^{(2)}, \quad \xi_3^{(1)} = \xi_2^{(2)} + \tfrac{1}{2} \cdot \xi_3^{(2)},$$

und für die Form q ergibt sich

$$q(x) = \xi_1^{(2)} + 2 \cdot \xi_2^{(2)} - \tfrac{1}{2} \cdot \xi_3^{(2)}.$$

Setzen wir schließlich $z_1 = y_1^{(2)}$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2^{(2)}$, $z_3 = \sqrt{2}\, y_3^{(2)}$, so ist $\mathfrak{B}^{[N]} = \{z_1, z_2, z_3\}$ eine Normalbasis für die gegebene quadratische Form q. Sind η_1, η_2, η_3 die Koordinaten von x in bezug auf diese Normalbasis, so gilt

$$q(x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2,$$

und es ist

$$\xi_1 = \eta_1 - \sqrt{2} \cdot \eta_2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \eta_3, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta_3, \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta_3.$$

Für die Matrix A gilt also

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{Vmatrix}.$$

Die quadratische Form q ist nicht ausgeartet und indefinit. Es ist $r = 3$, $p = 2$, $s = 1$.

4.* BILINEARFORMEN UND LINEARE ABBILDUNGEN VON V IN V^*; KOVARIANTE UND KONTRAVARIANTE KOORDINATEN; TRANSFORMATIONSGESETZE

Im letzten Abschnitt dieses Paragraphen untersuchen wir die Beziehungen zwischen einem Vektorraum V und seinem dualen Vektorraum V^*, die sich durch eine gegebene Bilinearform f auf dem Vektorraum V beschreiben lassen.

Es sei V ein linearer Vektorraum und f eine gegebene Bilinearform auf V, von der wir zunächst nicht voraussetzen, daß sie symmetrisch ist. Ist $y \in V$ ein fester Vektor, so definiert die Gleichung

$$y^*(x) \underset{\text{Def.}}{=} f(y, x) \tag{19}$$

bei festem y ein lineares Funktional $y^* \in V^*$. Benutzen wir das in § 12, Nr. 2 definierte Klammersymbol $\langle\, ,\, \rangle$, so können wir (19) in der Form

$$\langle x, y^* \rangle = f(x, y) \tag{19'}$$

schreiben. Durch diese Gleichung wird jedem Vektor $y \in V$ ein Kovektor $y^* \in V^*$ zugeordnet. Wir erhalten eine Abbildung B von V in V^*:

$$By \underset{\text{Def.}}{=} y^*, \tag{20}$$

von der wir nachweisen wollen, daß sie linear ist. Die Definitionsgleichungen (19') und (20) können wir zu einer Gleichung zusammenfassen,

$$\langle x, By \rangle = f(x, y), \tag{21}$$

wobei wir beachten müssen, daß diese Gleichung für jedes Paar x, y von Vektoren aus V gelten soll. Sind y_1, y_2 Vektoren aus V, so ist

$$\langle x, B(y_1 + y_2) \rangle = f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$
$$= \langle x, By_1 \rangle + \langle x, By_2 \rangle = \langle x, By_1 + By_2 \rangle.$$

Dies gilt für jedes $x \in V$, und folglich ist $B(y_1 + y_2) = By_1 + By_2$. Entsprechend beweist man die Gleichung $B(\alpha y) = \alpha By$. Jeder Bilinearform f auf dem linearen Vektorraum V entspricht eine lineare Abbildung $B \in \mathscr{A}(V, V^*)$. Ist umgekehrt $B \in \mathscr{A}(V, V^*)$, so wird offenbar durch

$$f(x, y) \underset{\text{Def.}}{=} \langle x, By \rangle$$

eine Funktion f zweier Veränderlicher auf dem Vektorraum V definiert, die in jedem Argument linear, also eine Bilinearform ist.

XI. *Die Gleichung*

$$\langle x, By \rangle = f(x, y) \tag{21}$$

definiert eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Bilinearformen auf dem linearen Vektorraum V und den linearen Abbildungen von V in seinen dualen Vektorraum V^*.

Aus § 12, Nr. 4 ist bekannt, daß jeder linearen Abbildung A eines Vektorraumes V in einen Vektorraum V' eine lineare Abbildung A^* von V'^* in V^* entspricht, die adjungierte Abbildung. In dem oben betrachteten Fall ist $V' = V^*$ und $B \in \mathscr{A}(V, V^*)$. Dann ist B^* eine lineare Abbildung von V^{**} in V^*. Setzen wir voraus, daß V ein endlichdimensionaler Vektorraum[1]) ist, und beachten, daß wir für einen derartigen Vektorraum V und V^{**} identifiziert haben, so ist die zu B adjungierte Abbildung B^* ebenfalls eine lineare Abbildung von V in V^*. Die Abbildungen B und B^* sind durch die Gleichung

$$\langle B^*x, y \rangle = \langle x, By \rangle \tag{22}$$

verknüpft. Ist f eine symmetrische Bilinearform, so erhalten wir die Gleichungskette

$$\langle B^*x, y \rangle = \langle x, By \rangle = f(x, y) = f(y, x) = \langle y, Bx \rangle = \langle Bx, y \rangle,$$

aus der

$$B^* = B \tag{23}$$

---

[1]) Oder ein reflexiver Vektorraum.

folgt. Gilt umgekehrt (23), so ist

$$f(x, y) = \langle x, \boldsymbol{B}y\rangle = \langle \boldsymbol{B}x, y\rangle = \langle y, \boldsymbol{B}x\rangle = f(y, x),$$

und f ist eine symmetrische Bilinearform.

Eine lineare Abbildung $\boldsymbol{B} \in \mathscr{A}(V, V^*)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn sie der Gleichung (23) genügt. Wir haben folgendes Kriterium bewiesen:

XII. *Die Bilinearform f auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V ist dann und nur dann symmetrisch, wenn die ihr entsprechende lineare Abbildung $\boldsymbol{B} \in \mathscr{A}(V, V^*)$ selbstadjungiert ist.*

Zwischen den quadratischen Formen auf dem linearen Vektorraum V und den selbstadjungierten linearen Abbildungen von V in seinen dualen Vektorraum V^* besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung.

Es sei V ein n-dimensionaler linearer Vektorraum und q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf dem Vektorraum V, die wir im folgenden festhalten. Wir untersuchen die durch die quadratische Form q festgelegten Beziehungen zwischen den Vektorräumen V und V^*.

Es sei f die der quadratischen Form q entsprechende symmetrische Bilinearform und $\boldsymbol{B}$ die zugeordnete selbstadjungierte Abbildung von V in V^*. Ist $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ die Koeffizientenmatrix der Form q bzw. f in bezug auf eine feste Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ von V, so gilt

$$\beta_{i'i} = f(y_{i'}, y_i) = \langle y_{i'}, \boldsymbol{B}y_i\rangle, \tag{24}$$

und folglich ist B die der linearen Abbildung $\boldsymbol{B}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ von V und die zugehörige Kobasis $\mathfrak{B}^*$ von V^* entsprechende Matrix.

Da die Form q als nicht ausgeartet vorausgesetzt war, ist die Matrix B und damit die lineare Abbildung $\boldsymbol{B}$ regulär. Die lineare Abbildung $\boldsymbol{B}$ ist ein Isomorphismus von V auf V^*.

Wir betrachten die Koordinaten eines Vektors $x \in V$ in bezug auf die gegebene Basis $\mathfrak{B}$ und erinnern uns an das in § 12, Nr. 5, Satz XII beschriebene Transformationsverhalten beim Übergang zu einer neuen Basis. Damit wir uns besser merken können, daß die Koordinaten eines Vektors und die Kobasis kontravariant zur Basis transformiert werden, unterscheiden wir die Koordinaten des Vektors x sowie die Elemente der Kobasis in diesem Abschnitt durch obere Indizes: Für die Koordinaten des Vektors x schreiben wir $\xi^1, \ldots, \xi^n$, und es sei $\mathfrak{B}^* = \{\overset{*}{y}{}^1, \overset{*}{y}{}^2, \ldots, \overset{*}{y}{}^n\}$ die zu $\mathfrak{B}$ gehörende Kobasis. Die Koordinaten eines Kovektors $x^* \in V^*$ unterscheiden wir wie bisher durch untere Indizes, da sie sich kovariant zu der Basis $\mathfrak{B}$ transformieren. In unserer neuen Bezeichnung ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i y_i, \quad x^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \overset{*}{y}{}^i.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise bedienen wir uns noch der sogenannten *Einstein-Konvention*, indem wir das Summenzeichen fortlassen und verabreden, daß *über gleiche untere und obere Indizes in einem Produkt zu summieren ist.* Wir schreiben

$$x = \xi^i y_i, \quad x^* = \xi_i^* \overset{*}{y}{}^i.$$

Die Transformationsgleichungen aus § 12, Nr. 5, Satz XII erhalten in der neuen abgekürzten Schreibweise die Form

$$y_i = \alpha_i^{i'} x_{i'}, \quad x_i = \alpha_i^{(-1)i'} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

$$\overset{*}{x}{}^{i'} = \alpha_i^{i'} \overset{*}{y}{}^i, \quad \overset{*}{y}{}^{i'} = \alpha_i^{(-1)i'} \overset{*}{x}{}^i \quad (i' = 1, \ldots, n) \tag{25*}$$

und

$$\xi^{i'} = \alpha_i^{i'} \cdot \eta^i, \quad \eta^{i'} = \alpha_i^{(-1)i'} \cdot \xi^i \quad (i' = 1, \ldots, n) \tag{26}$$

$$\eta_i^* = \alpha_i^{i'} \cdot \xi_{i'}^*, \quad \xi_i^* = \alpha_i^{(-1)i'} \cdot \eta_{i'}^* \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{26*}$$

Dabei haben wir den Zeilenindex der Matrix A bzw. A^{-1} als oberen Index geschrieben:

$$A = \|\alpha_i^{i'}\|_{n,n}, \quad A^{-1} = \|\alpha_i^{(-1)i'}\|_{n,n}.$$

Diese zuerst in der Relativitätstheorie eingeführte Schreibweise erweist sich als zweckmäßig zur einfachen Beschreibung des Transformationsverhaltens der Koordinaten in dem von uns betrachteten Fall eines Vektorraumes V mit einer ausgezeichneten nicht ausgearteten quadratischen Form. Der in der Relativitätstheorie betrachtete Vektorraum besitzt die Dimension 4, und q ist eine nicht ausgeartete quadratische Form der Signatur 2.

In § 5, Nr. 3 haben wir mit Hilfe einer Basis des n-dimensionalen Vektorraumes V einen Isomorphismus von V auf den Vektorraum R^n definiert. Durch diesen Isomorphismus wurde jedem Vektor $x \in V$ ein n-tupel $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ zugeordnet, dessen Elemente wir als die Koordinaten des Vektors x in bezug auf die gegebene Basis bezeichneten. Wir haben oben festgestellt, daß die nicht ausgeartete quadratische Form q, die wir in unserem Vektorraum V ausgezeichnet haben, einen Isomorphismus B von V auf V^* definiert. Dadurch erhalten wir eine neue Möglichkeit, einen Isomorphismus von V auf den Vektorraum R^n zu definieren, der zu einer neuen Sorte von Koordinaten führt.

Es sei $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis von V und $\mathfrak{B}^* = \{\overset{*}{y}{}^1, \ldots, \overset{*}{y}{}^n\}$ die zugehörige Kobasis von V^*. Ist $\Phi_{\mathfrak{B}^*}$ der kanonische Isomorphismus von V^* auf R^n, der durch die Kobasis $\mathfrak{B}^*$ definiert wird, so ist

$$\Phi_{\mathfrak{B}}^* \underset{\text{Def.}}{=} \Phi_{\mathfrak{B}^*} B$$

ein Isomorphismus von V auf R^n. Die Elemente des n-tupels $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Phi_{\mathfrak{B}}^*(x)$ nennen wir wiederum *Koordinaten des Vektors* x. Sie werden durch die Gleichung

$$Bx = \xi_i \overset{*}{y}{}^i \tag{27}$$

definiert. Die neuen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des Vektors x werden kontravariant zur Kobasis und folglich kovariant zur Basis transformiert. In Übereinstimmung damit werden sie durch untere Indizes unterschieden. Um zwischen den beiden Sorten von Koordinaten eines Vektors zu unterscheiden, nennen wir die durch

$$x = \xi^i y_i$$

definierten Koordinaten die *kontravarianten Koordinaten* von x bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$, während die durch die Gleichung (27) definierten Koordinaten die *kovarianten Koordinaten* von x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ heißen. Als wesentliches Unterscheidungsmerkmal haben wir dabei das Transformationsverhalten der Koordinaten beim Übergang von einer Basis von V zu einer anderen Basis gewählt.

Betrachten wir die Umkehrabbildung $B^{-1} \in \mathscr{A}(V^*, V)$, so wird die Kobasis $\mathfrak{B}^* = \{\overset{*}{y}{}^1, \ldots, \overset{*}{y}{}^n\}$ von V^* auf eine Basis $\mathfrak{B}' = \{y^1, \ldots, y^n\}$ von V abgebildet:

$$y^i = B^{-1} \overset{*}{y}{}^i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{28}$$

Die Basis $\mathfrak{B}'$ heißt die zu $\mathfrak{B}$ *reziproke Basis* von V und wird kontravariant zur Basis $\mathfrak{B}$ transformiert. Aus der Gleichung (27) erhält man

$$x = \xi_i y^i, \tag{29}$$

wenn man auf sie die lineare Abbildung B^{-1} anwendet.

Die kovarianten Koordinaten eines Vektors x *bezüglich der Basis* $\mathfrak{B}$ *sind seine gewöhnlichen (kontravarianten) Koordinaten bezüglich der reziproken Basis* $\mathfrak{B}'$.

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen Basis und reziproker Basis sowie zwischen den kontravarianten und den kovarianten Koordinaten eines Vektors.

Zunächst ist

$$f(y_{i'}, y^i) = \langle y_{i'}, By^i \rangle = \langle y_{i'}, \overset{*}{y}{}^i \rangle = \delta^i_{i'}.$$

Dabei ist $\delta^i_{i'}$ das in neuer Schreibweise angegebene Kronecker-Symbol. Aus dieser Gleichung erklärt sich auch die Bezeichnung reziproke Basis. Ist $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ die Koeffizientenmatrix der nicht ausgearteten quadratischen Form q,

$$q(x) = \beta_{i'i} \cdot \xi^{i'} \cdot \xi^i,$$

in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$, so gilt

$$f(y_{i'}, y_i) = \langle y_{i'}, By_i \rangle = \beta_{i'i} \quad (i', i = 1, 2, ..., n) \tag{30}$$

und

$$By_i = \beta_{i'i} \overset{*}{y}{}^{i'} \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{31}$$

Definieren wir in Analogie zur Gleichung (24)

$$\beta^{i'i} = f(y^{i'}, y^i) = \langle B^{-1}\overset{*}{y}{}^{i'}, BB^{-1}\overset{*}{y}{}^i \rangle, \tag{32}$$

so ist

$$B^{-1}\overset{*}{y}{}^{i'} = \beta^{i'i} y_i \quad (i' = 1, 2, ..., n), \tag{33}$$

und die Matrix $\|\beta^{i'i}\|_{n,n} = B^{-1}$ ist die zu $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ inverse Matrix. Aus den Gleichungen (31) und (33) folgt nämlich

$$\beta^{i'j} \cdot \beta_{ji} = \delta^{i'}_i, \quad \beta_{i'j} \cdot \beta^{ji} = \delta^i_{i'},$$

wenn man beachtet, daß die Matrizen $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ und $B^{-1} = \|\beta^{i'i}\|_{n,n}$ symmetrisch sind.

Für den Zusammenhang zwischen Basis und reziproker Basis erhalten wir die Gleichungen

$$y^i = \beta^{i'i} y_{i'}, \quad y_i = \beta_{i'i} y^{i'} \quad (i = 1, ..., n), \tag{34}$$

und für den Zusammenhang zwischen den kovarianten und den kontravarianten Koordinaten eines Vektors $x \in V$ ergibt sich

$$\xi^{i'} = \beta^{i'i} \cdot \xi_i, \quad \xi_{i'} = \beta_{i'i} \cdot \xi^i \quad (i' = 1, ..., n). \tag{35}$$

Die hier kurz umrissene Transformationstheorie der Koordinaten eines Vektors in einem linearen Vektorraum V mit einer ausgezeichneten nicht ausgearteten quadratischen Form q vereinfacht sich wesentlich, wenn in dem Vektorraum V eine Basis existiert, die mit ihrer reziproken Basis übereinstimmt. In diesem Fall braucht man nicht zwischen kovarianten und kontravarianten Koordinaten eines Vektors zu unterscheiden, und das Transformationsverhalten der Koordinaten stimmt mit dem Transformationsverhalten der Basis überein.

Wir wollen zum Abschluß dieser Betrachtungen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer zu sich selbst reziproken Basis im Vektorraum V ableiten.

Es sei $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ eine zu sich selbst reziproke Basis im n-dimensionalen Vektorraum V. Dann ist $y^i = y_i$ $(i = 1, ..., n)$, und aus der Gleichung (30) folgt

$$\beta_{i'i} = f(y_{i'}, y_i) = f(y_{i'}, y^i) = \delta^i_{i'}.$$

Mit anderen Worten: $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n} = E$ ist die Einheitsmatrix, und die Form q besitzt in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ die Darstellung

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{36}$$

Dies ist die Normalform von q, und wir erhalten: *Ist $\mathfrak{B}$ eine zu sich selbst reziproke Basis von V, so ist $\mathfrak{B}$ eine Normalbasis für die quadratische Form q, und die Form q ist positiv definit.*

Wir nehmen umgekehrt an, daß in dem n-dimensionalen Vektorraum V eine positiv definite quadratische Form q gegeben ist. Dann ist $r = p = n$, und es gibt eine Normalbasis $\mathfrak{B}^{[N]} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ von V, so daß q in der Normalform (36) dargestellt werden kann. Für die Koeffizientenmatrix B von q in bezug auf diese Basis gilt $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n} = E$. Aus den Gleichungen (34) und (35) folgt

$$y^i = y_i, \quad \xi^i = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

d. h., $\mathfrak{B}^{[N]}$ ist eine zu sich selbst reziproke Basis.

XIII. *Ist V ein endlichdimensionaler linearer Vektorraum und q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf dem Vektorraum V, so gibt es in V dann und nur dann eine zu sich selbst reziproke Basis, wenn die Form q positiv definit ist.*

Ist V ein linearer Vektorraum mit einer ausgezeichneten nicht ausgearteten quadratischen Form q, so nennt man q die *metrische Fundamentalform* und spricht von einem *linearen Vektorraum mit Metrik*. Ist die quadratische Form q positiv definit, so heißt V ein *linearer Vektorraum mit euklidischer Metrik* oder kurz ein *euklidischer Vektorraum*.

Der Untersuchung der euklidischen Vektorräume ist das dritte Kapitel gewidmet.*

5. AUFGABEN

1. Eine Bilinearform f auf dem linearen Vektorraum V ist dann und nur dann alternierend, wenn ihre Koeffizientenmatrix B der Gleichung $B^{\mathsf{T}} = -B$ genügt. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft nennt man *schiefsymmetrisch*.

2.* Eine lineare Abbildung $\boldsymbol{B}$ von V in V^* heißt *alternierend*, wenn $\boldsymbol{B}^* = -\boldsymbol{B}$ ist.

Ist f eine alternierende Bilinearform auf dem Vektorraum V, so gibt es eine alternierende Abbildung $\boldsymbol{B}$ von V in V^*, so daß

$$f(x, y) = \langle \boldsymbol{B}x, y \rangle \tag{*}$$

ist. Wenn umgekehrt $\boldsymbol{B}$ eine alternierende Abbildung von V in V^* ist, so definiert die Gleichung (*) eine alternierende Bilinearform f.

3. Ist f eine alternierende Bilinearform auf dem Vektorraum V, so ist ihr Rang r eine gerade Zahl, und es gibt eine Basis $\mathfrak{B} = \{z_1, \ldots, z_n\}$, so daß f die Form

$$f(x_1, x_2) = \xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_2 \cdot \xi_1 + \xi_3 \cdot \xi_4 - \xi_4 \cdot \xi_3 + \cdots + \xi_{r-1} \cdot \xi_r - \xi_r \cdot \xi_{r-1}$$

besitzt.

4. Ist B eine schiefsymmetrische Matrix, so ist der Rang $r(B)$ eine gerade Zahl, und es gibt eine reguläre Matrix A, so daß

$$A^{\mathsf{T}} \cdot B \cdot A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

ist.

5.* Es sei q eine quadratische Form auf dem Vektorraum V und $B = \|\beta_{i'i}\|_{n,n}$ ihre Koeffizientenmatrix in bezug auf eine feste Basis $\mathfrak{B}$ von V:

$$q(x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i.$$

Sind die $r = r(B)$ Zahlen $\delta_1 = \beta_{11}$, $\delta_2 = \det_2 |\beta_{i'i}|$, $\delta_3 = \det_3 |\beta_{i'i}|$, ..., $\delta_r = \det_r |\beta_{i'i}|$ sämtlich von Null verschieden und setzt man $\delta_0 = 1$, so gibt es eine reguläre Dreiecksmatrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ ($\alpha_{i'i} = 0$ für $i' < i$), so daß für $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \xi_j$ $(i = 1, ..., r)$ die *Jacobische Gleichung*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\delta_{i-1}}{\delta_i} \cdot \eta_i^2$$

gilt.

6.* Es sei wiederum q eine quadratische Form, und die Zahlen $\delta_1, ..., \delta_r$ seien wie in (6) definiert. Die quadratische Form q ist dann und nur dann positiv definit, wenn $\delta_i > 0$ für $i = 1, ..., n$ gilt. Die quadratische Form q ist dann und nur dann negativ definit, wenn $(-1)^i \cdot \delta_i > 0$ für $i = 1, ..., n$ gilt.

III. EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

In diesem Kapitel werden lineare Vektorräume untersucht, auf denen eine positiv definite quadratische Form gegeben ist, die im Verlauf der Betrachtungen festgehalten wird.

Ein endlichdimensionaler linearer Vektorraum mit einer festen positiv definiten quadratischen Form heißt ein euklidischer Vektorraum.

Die in einem euklidischen Vektorraum ausgezeichnete positiv definite quadratische Form gestattet, die Länge eines Vektors, die Winkel zwischen zwei Vektoren und andere geometrische Begriffe in die Theorie der Vektorräume einzuführen und damit feinere Aussagen über die Struktur derartiger Vektorräume zu gewinnen.

§ 15. DER EUKLIDISCHE UND DER PSEUDO-EUKLIDISCHE ZWEIDIMENSIONALE VEKTORRAUM

1. EINLEITUNG

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels beschränken wir uns auf die Betrachtung linearer Vektorräume der Dimension zwei. Wir wollen uns in diesem einfachen Fall über die Verhältnisse unterrichten, die durch Auszeichnung einer nicht ausgearteten quadratischen Form auf dem Vektorraum entstehen. Dabei betrachten wir nicht nur positiv definite quadratische Formen, denen euklidische Vektorräume im Sinne der obigen Definition entsprechen, sondern auch indefinite quadratische Formen, die zur Definition pseudo-euklidischer Vektorräume Anlaß geben.

Es sei $V^{(2)}$ ein zweidimensionaler linearer Vektorraum und q_0 eine nicht ausgeartete quadratische Form. Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis für die quadratische Form, so können wir q_0 in bezug auf diese Basis in der Normalform schreiben, und für

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2 \tag{1}$$

gilt

$$q_0(\boldsymbol{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 \tag{2}$$

oder

$$q_0(\boldsymbol{x}) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \tag{3}$$

oder

$$q_0(x) = -\xi_1^2 - \xi_2^2. \qquad (2^-)$$

Der letzte Fall einer negativ definiten quadratischen Form braucht nicht gesondert untersucht zu werden; auf ihn lassen sich die für den ersten Fall gewonnenen Ergebnisse in geeigneter Weise übertragen, wenn die Koeffizientenmatrix durch ihre Negative ersetzt wird. Wir nehmen also an, daß auf dem zweidimensionalen linearen Vektorraum $V^{(2)}$ eine positiv definite oder eine indefinite quadratische Form q_0 gegeben ist.

2. DER EUKLIDISCHE ZWEIDIMENSIONALE VEKTORRAUM; DAS SKALARPRODUKT; DIE NORM EINES VEKTORS; DIE DREIECKSUNGLEICHUNG; DIE CAUCHY-SCHWARZSCHE UNGLEICHUNG; DIE WINKEL ZWISCHEN ZWEI VEKTOREN; ISOMETRIEN; CHARAKTERISIERUNG DER ISOMETRISCHEN OPERATOREN; DREHUNGEN UND DREHSPIEGELUNGEN; ZWEIREIHIGE ORTHOGONALE MATRIZEN

Wir betrachten zunächst den Fall, daß q_0 eine positiv definite quadratische Form auf dem linearen Vektorraum $V^{(2)}$ ist. In diesem Fall ist $V^{(2)}$ ein *euklidischer zweidimensionaler Vektorraum.* Der quadratischen Form q_0 entspricht eine symmetrische Bilinearform f_0, die wir mit runden Klammern bezeichnen:

$$(x, y) \underset{\text{Def.}}{=} f_0(x, y) \quad (x, y \in V). \qquad (4)$$

Den Wert dieser Bilinearform für ein Paar von Vektoren $x, y \in V^{(2)}$ nennen wir das *Skalarprodukt* oder das *innere Produkt der Vektoren* x *und* y. Entsprechend dieser Definition gilt

$$q_0(x) = (x, x). \qquad (5)$$

Der Wert der quadratischen Form q_0 *für den Vektor* x *ist das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst.* Die quadratische Form q_0 ist nach Voraussetzung positiv definit, daraus folgt:

Das Skalarprodukt eines Vektors $x \in V^{(2)}$ *mit sich selbst ist nicht negativ, und es ist dann und nur dann gleich Null, wenn* $x = o$ *der Nullvektor ist.*

Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ eine Normalbasis des Vektorraumes $V^{(2)}$ für die quadratische Form q_0, so gilt für den Vektor $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$

$$(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2. \qquad (2')$$

1^0. Als Beispiel betrachten wir den zweidimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}^{(2)}$ der Translationen in der Ebene (vgl. § 1, Nr. 3, 8^0). Ist O ein fester Punkt in der Ebene, so können wir jeden Vektor $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}^{(2)}$ durch eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$ repräsentieren. Da jede gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$ eine Translation $\mathfrak{x}$ bestimmt, tritt auch jede gerichtete Strecke als Repräsentant eines Vektors $\mathfrak{x} \in \mathfrak{V}^{(2)}$ auf. Wir betrachten zwei zueinander senkrechte gerichtete Strecken der Länge 1, die wir mit $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ bezeichnen, und erhalten ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene. Es seien $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ die Vektoren aus $\mathfrak{V}^{(2)}$, die durch $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ repräsentiert werden. Ist $\mathfrak{x} = \xi_1\mathfrak{x}_1 + \xi_2\mathfrak{x}_2$ ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{V}^{(2)}$, so wird er durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$ repräsentiert, deren Endpunkt P die kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2 besitzt (Abb. 5). Durch

$$q_0(\mathfrak{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

wird auf dem Vektorraum $\mathfrak{V}^{(2)}$ eine positiv definite quadratische Form q_0 ausgezeichnet, und $\mathfrak{V}^{(2)}$ wird ein euklidischer Vektorraum. Der Wert $q_0(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$, d. h. das Skalarprodukt von $\mathfrak{x}$ mit sich selbst, ist dann das Quadrat der Länge der gerichteten Strecke $\overrightarrow{OP}$, die den Vektor $\mathfrak{x}$ repräsentiert.

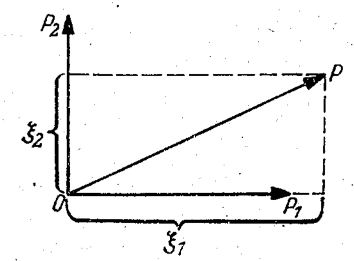


Abb. 5

Diese geometrische Veranschaulichung veranlaßt uns zu der folgenden Definition der *Norm* oder *Länge* eines Vektors.

Die positive Wurzel aus dem Skalarprodukt eines Vektors $\boldsymbol{x}$ mit sich selbst heißt die *Norm* oder auch die *Länge des Vektors* $\boldsymbol{x}$:

$$|\boldsymbol{x}| \underset{\text{Def.}}{=} {}_{+}\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}. \tag{6}$$

Wir müssen uns überzeugen, daß die so definierte Norm oder Länge eines Vektors gewisse Eigenschaften besitzt, die man anschaulich von der Länge eines Vektors erwartet. Es sind dies folgende Eigenschaften:

1. $|\boldsymbol{x}| \geqq 0$, und aus $|\boldsymbol{x}| = 0$ folgt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$;

2. $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|$, wobei $|\alpha|$ den gewöhnlichen Betrag der reellen Zahl α bezeichnet;

3. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

Die Ungleichung 3 heißt *Dreiecksungleichung*, denn ihre anschauliche Interpretation in der Ebene bedeutet, daß in einem Dreieck die Länge einer jeden Seite stets kleiner oder gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist.

2^0. Ist $\mathfrak{V}^{(2)}$ der aus 1^0 bekannte euklidische Vektorraum der Translationen der Ebene und sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zwei Vektoren aus $\mathfrak{V}^{(2)}$, die durch die gerichteten Strecken $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ repräsentiert werden, so wird der Vektor $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PR}$ repräsentiert. Die Normen $|\mathfrak{x}|$, $|\mathfrak{y}|$, $|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|$ der Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ sind gleich den Längen der sie repräsentierenden Strecken, und Abb. 6 veranschaulicht die Dreiecksungleichung.

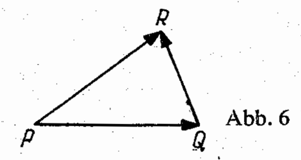


Abb. 6

Aus der weiter oben gemachten Bemerkung über die Eigenschaften des Skalarproduktes eines Vektors x mit sich selbst folgt unmittelbar die Eigenschaft 1 für die durch (6) definierte Norm eines Vektors. Die Eigenschaft 2 ergibt sich aus der Linearität des Skalarproduktes in beiden Argumenten, $(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 \cdot (x, x)$, und der Gleichung $_+\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, die für jede reelle Zahl α gilt. Zum Beweis der Dreiecksungleichung müssen wir etwas weiter ausholen. Wir beweisen zunächst die sogenannte *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|(x, y)| \leqq |x| \cdot |y| \quad (x, y \in V^{(2)}). \tag{7}$$

Hier steht auf der linken Seite der Betrag der reellen Zahl (x, y) und rechts das Produkt der Norm des Vektors x mit der Norm des Vektors y. Aus dieser Ungleichung erhalten wir die Dreiecksungleichung auf folgendem Wege. Da $(x, y) \leqq |(x, y)|$ ist, gilt $(x, y) \leqq |x| \cdot |y|$. Diese Ungleichung multiplizieren wir mit 2 und addieren auf beiden Seiten $|x|^2 + |y|^2$; es ergibt sich die Ungleichung

$$|x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot (x, y) \leqq |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y|$$

oder, wenn wir (6) berücksichtigen,

$$(x, x) + (y, y) + 2 \cdot (x, y) \leqq (|x| + |y|)^2.$$

Es ist

$$(x, x) + (y, y) + 2 \cdot (x, y) = (x, x + y) + (y, x + y) = (x + y, x + y).$$

Folglich gilt

$$(x + y, x + y) \leqq (|x| + |y|)^2,$$

und wir erhalten die Dreiecksungleichung, wenn wir auf beiden Seiten die positive Wurzel ziehen.

Zum Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung betrachten wir eine Normalbasis $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ für die quadratische Form q_0 und zwei beliebige Vektoren $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ und $y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$ aus $V^{(2)}$. Wir berechnen das Quadrat der

Determinante für die von ihren Koordinaten gebildete Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2 \geqq 0.$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2 \\ \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2 & \eta_1^2 + \eta_2^2 \end{vmatrix}.$$

Dabei haben wir den Produktsatz der Determinante sowie $\det |A| = \det |A^{\mathsf{T}}|$ benutzt. Für den Wert der in der obigen Gleichung rechts stehenden Determinante erhalten wir

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) \cdot (\eta_1^2 + \eta_2^2) - (\xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2)^2 \geqq 0.$$

Es ist

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = (x, x), \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = (y, y), \quad \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2 = (x, y)$$

und damit

$$(x, x) \cdot (y, y) \geqq (x, y)^2.$$

Zieht man in dieser Ungleichung auf beiden Seiten die positive Wurzel, so folgt (7).

Unter der Voraussetzung, daß die Vektoren x und y vom Nullvektor verschieden sind, läßt sich die Ungleichung (7) in der Form

$$-1 \leqq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leqq 1 \tag{7'}$$

schreiben. Da der Quotient $\dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ überdies für $x = y$ den Wert 1 annimmt, gibt (7′) Anlaß zu der folgenden Definition von Winkeln:

$$\cos \varphi \underset{\text{Def.}}{=} \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}. \tag{8}$$

Beschränken wir den Definitionsbereich von φ auf $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, so werden durch die Gleichung (8) zwei Winkel φ_1 und φ_2 bestimmt, die sich zu 2π ergänzen und die wir die *Winkel zwischen den Vektoren x und y* nennen:

$$\varphi_1 = \sphericalangle_1[x, y], \quad \varphi_2 = \sphericalangle_2[x, y]; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi.$$

Dabei läßt sich φ_1 so wählen, daß $0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi$ ist. Aus der Gleichung

$$2 \cdot (x, y) = (x, x) + (y, y) - (x - y, x - y)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Definition von φ_1

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi_1. \tag{8'}$$

Die Gleichung (8′) ist der aus der Schule bekannte *Cosinussatz*.

Um dies einzusehen, veranschaulichen wir uns die Verhältnisse in der Ebene.

3^0. Wir betrachten wie oben den euklidischen Vektorraum der Translationen in der Ebene $\mathfrak{V}^{(2)}$ und repräsentieren die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \mathfrak{V}^2$ durch die gerichteten Strecken $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RQ}$. Tragen wir noch die Winkel φ_1 und φ_2 als Winkel zwischen den gerichteten Strecken $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ ein, so erhalten wir Abb. 7.

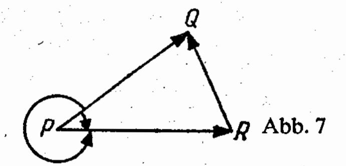


Abb. 7

Die Vektoren x_1, x_2 einer Normalbasis $\mathfrak{B}$ für die quadratische Form q_0 genügen den Gleichungen

$$|x_1| = |x_2| = 1, \quad (x_1, x_2) = 0. \tag{9}$$

Es ist

$$\sphericalangle_1[x_1, x_2] = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle_2[x_1, x_2] = \frac{3\pi}{2}.$$

Zwei Vektoren x und y, für die $(x, y) = 0$ ist, heißen zueinander *senkrecht* oder *orthogonal.*

Man zeigt leicht, daß *zwei vom Nullvektor verschiedene orthogonale Vektoren* x_1, $x_2 \in V^{(2)}$ *stets linear unabhängig sind* und folglich eine Basis von $V^{(2)}$ bilden. Ist überdies die Norm dieser Vektoren gleich 1, d. h., *gelten für sie die Gleichungen* (9), *so bilden die Vektoren* x_1, x_2 *eine Normalbasis von* $V^{(2)}$ *für die gegebene quadratische Form.*

Um an die Orthogonalität der Vektoren x_1, x_2 einer Normalbasis zu erinnern, nennen wir eine Normalbasis für die ausgezeichnete Form q_0 in Zukunft eine *Orthonormalbasis* des euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$.

4^0. Bilden die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ des zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes $\mathfrak{V}^{(2)}$ eine Orthonormalbasis und repräsentieren wir sie durch gerichtete Strecken $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, die im gleichen Punkt O der Ebene angetragen sind, so erhalten wir ein kartesisches Koordinatensystem. Jedem Vektor $\mathfrak{x} = \xi_1\mathfrak{x}_1 + \xi_2\mathfrak{x}_2$ entspricht eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, und der Punkt P besitzt die kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2. Umgekehrt definiert jeder Punkt P mit den kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2 eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, die den Vektor $\mathfrak{x} = \xi_1\mathfrak{x}_1 + \xi_2\mathfrak{x}_2$ repräsentiert (vgl. Abb. 5 auf S. 204).

Wir betrachten nun einen weiteren zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $V'^{(2)}$. Das Skalarprodukt der Vektoren $x', y' \in V'^{(2)}$ bezeichnen wir mit (x', y'), und es sei $\mathfrak{B}' = \{x_1', x_2'\}$ eine Orthonormalbasis von $V'^{(2)}$. Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ und $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ ein Vektor aus $V^{(2)}$, so wird durch

$$x' = Ix = \xi_1 x_1' + \xi_2 x_2'$$

eine Abbildung $\boldsymbol{I}$ von $V^{(2)}$ auf $V'^{(2)}$ definiert. Man überzeugt sich sofort daß $\boldsymbol{I}$ ein Isomorphismus von $V^{(2)}$ auf $V'^{(2)}$ ist. Überdies gilt aber für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$

$$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{10}$$

Der Wert des Skalarproduktes der Bildvektoren $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{I}\boldsymbol{y}$ ist gleich dem Wert des Skalarproduktes von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$. Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft nennen wir *isometrisch* und die Abbildung $\boldsymbol{I}$ einen *isometrischen Isomorphismus* oder kurz eine *Isometrie*. Die Vektorräume $V^{(2)}$ und $V'^{(2)}$ heißen *isometrisch isomorph*. Wir haben folgenden Satz bewiesen:

I. *Zwei zweidimensionale euklidische Vektorräume sind isometrisch isomorph.*

Bedeutet die Isomorphie zweier Vektorräume die Gleichheit ihrer algebraischen Struktur schlechthin, so bedeutet die Isometrie darüber hinaus auch die Gleichheit der auf den Vektorräumen durch die ausgezeichnete quadratische Form zusätzlich definierten metrischen Struktur. Satz I besagt, daß es bis auf Isometrie nur einen zweidimensionalen euklidischen Vektorraum gibt, so daß wir in diesem Sinne von *dem* zweidimensionalen euklidischen Vektorraum sprechen können.

Die *isometrischen linearen Operatoren* eines zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$, d. h. die Isometrien von $V^{(2)}$ auf sich, lassen sich durch den folgenden Satz charakterisieren:

II. *Ein isometrischer linearer Operator $\boldsymbol{U} \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ bildet eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ auf eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ ab. Ist $\boldsymbol{U} \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein linearer Operator, der eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ auf eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ abbildet, so ist $\boldsymbol{U}$ isometrisch.*

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ und $\boldsymbol{U}$ ein isometrischer linearer Operator auf $V^{(2)}$, so ist

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(\boldsymbol{U}) = U_+ = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{oder} \quad \Phi_{\mathfrak{B}}(\boldsymbol{U}) = U_- = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

wobei φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ einen der beiden Winkel zwischen $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_1$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ und φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ ein gegebener Winkel, so ist der durch die Matrix

$$U_+ = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad U_- = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix} \tag{11}$$

definierte Operator $\boldsymbol{U} \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ isometrisch.

Zum Beweis sei zunächst $\boldsymbol{U} \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein isometrischer Operator. Dann gilt

$$(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_1) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = |\boldsymbol{x}_1|^2 = 1 = |\boldsymbol{x}_2|^2 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_2),$$

$$(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0,$$

und $\boldsymbol{U}\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_2\}$ ist eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$.

Ist $U\mathfrak{B} = \{Ux_1, Ux_2\}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$ und sind $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, $y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$ beliebige Vektoren aus $V^{(2)}$, so gilt

$$(Ux, Uy) = (\xi_1 Ux_1 + \xi_2 Ux_2, \eta_1 Ux_1 + \eta_2 Ux_2) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \xi_2 \cdot \eta_2.$$

Folglich ist

$$(Ux, Uy) = (x, y),$$

und der Operator U ist isometrisch. Damit sind die ersten beiden Aussagen von Satz II bewiesen.

Ist nun U isometrisch und $\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis, so gilt

$$Ux_1 = v_{11} x_1 + v_{21} x_2, \quad Ux_2 = v_{12} x_1 + v_{22} x_2,$$

und es ist

$$(Ux_1, x_1) = |Ux_1| \cdot |x_1| \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$(Ux_1, x_1) = (v_{11} x_1 + v_{21} x_2, x_1) = v_{11} \cdot (x_1, x_1) + v_{21} \cdot (x_2, x_1) = v_{11}.$$

Also ist

$$v_{11} = \cos\varphi.$$

Ferner ist $(Ux_1, Ux_1) = v_{11}^2 + v_{21}^2 = 1$, und wir können

$$v_{21} = \sin\varphi$$

setzen. Durch die Gleichungen $v_{11} = \cos\varphi$, $v_{21} = \sin\varphi$ haben wir φ als einen der beiden Winkel zwischen x_1 und Ux_1 festgelegt. Ist $v_{11}^2 \neq 1$, so ist $\varphi = \sphericalangle_1[x_1, Ux_1]$, wenn $v_{21} > 0$ ist, und $\varphi = \sphericalangle_2[x_1, Ux_1]$, wenn $v_{21} < 0$ ist. Aus der Gleichung $(Ux_1, Ux_2) = v_{11} \cdot v_{12} + v_{21} \cdot v_{22} = 0$ folgt

$$\frac{v_{11}}{v_{21}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{v_{22}}{v_{12}},$$

und da überdies $(Ux_2, Ux_2) = v_{12}^2 + v_{22}^2 = 1$ ist, ergibt sich

$$v_{12} = -\sin\varphi, \quad v_{22} = \cos\varphi \quad \text{oder} \quad v_{12} = \sin\varphi, \quad v_{22} = -\cos\varphi.$$

Ist $v_{11}^2 = 1$, so sei $\varphi = \sphericalangle_1[x_1, Ux_1] = 0$ oder $\varphi = \sphericalangle_1[x_1, Ux_1] = \pi$ und $v_{21} = \sin\varphi = 0$. Aus den Gleichungen $(Ux_1, Ux_2) = v_{11} \cdot v_{12} + v_{21} \cdot v_{22} = 0$ und $(Ux_2, Ux_2) = v_{12}^2 + v_{22}^2 = 1$ folgt $v_{12} = 0$ und $v_{22} = \pm 1$. Ist $\varphi = 0$, so ist die Matrix U_+ die Einheitsmatrix, während U_- gleich

$$E_- = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

ist. Für $\varphi = \pi$ ist U_+ die negative Einheitsmatrix und $U_- = -E_-$.

Es sei nun U der durch

$$Ux_1 = \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2 \quad \text{und} \quad Ux_2 = -\sin\varphi x_1 + \cos\varphi x_2$$

bzw.

$$Ux_1 = \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2 \quad \text{und} \quad Ux_2 = \sin\varphi x_1 - \cos\varphi x_2$$

definierte lineare Operator, dann ist

$$(Ux_1, Ux_1) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 = (Ux_2, Ux_2),$$

$$(Ux_1, Ux_2) = \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi) + \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0$$

bzw.

$$(Ux_1, Ux_2) = \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sin \varphi \cdot (-\cos \varphi) = 0.$$

Es ist also

$$|Ux_1| = |Ux_2| = 1 \quad \text{und} \quad (Ux_1, Ux_2) = 0.$$

Aus der schon bewiesenen zweiten Aussage von Satz II folgt, daß U ein isometrischer Operator ist.

Bezeichnen U_+ und U_- die in (11) angegebenen Matrizen, so ist offenbar

$$U_- = U_+ \cdot E_-.$$

Ferner gilt

$$\det |U_+| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad \det |U_-| = -\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = -1.$$

Ist $U \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein isometrischer linearer Operator und $\det U = 1$, so gilt die Gleichung $\Phi_{\mathfrak{B}}(U) = U_+$, und wir nennen U eine *Drehung* des euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$.

Ist E_- der isometrische lineare Operator, der der Matrix E_- entspricht, so nennen wir E_- die *Spiegelung am Vektor* x_1.

Ist $U \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein isometrischer linearer Operator und $\det U = -1$, so ist $U = U'_+ E_-$, und U'_+ ist eine Drehung. Den Operator U, der sich aus der Spiegelung am Vektor x_1 und einer Drehung zusammensetzt, nennen wir eine *Drehspiegelung*.

Diese Bezeichnungen lassen sich durch folgende Überlegungen geometrisch veranschaulichen:

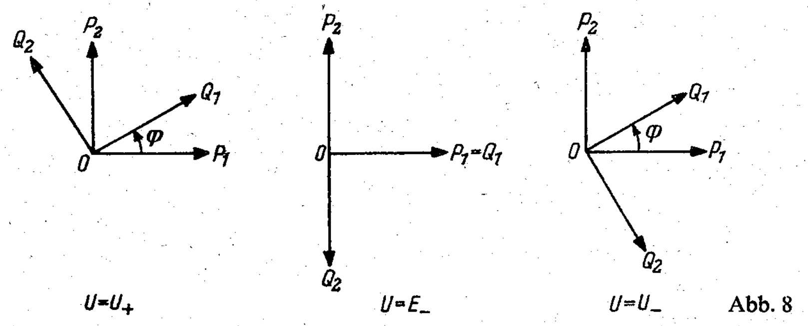


Abb. 8

5°. Ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ wiederum der euklidische Vektorraum der Translationen der Ebene und wird die Orthonormalbasis $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ durch das kartesische Koordinatensystem $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ und die Orthonormalbasis $U\mathfrak{x}_1, U\mathfrak{x}_2$ durch das kartesische Koordinatensystem $\overrightarrow{OQ_1}, \overrightarrow{OQ_2}$ repräsentiert, so erhält man Abb. 8.

Im ersten Fall bestimmt der Operator U eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel φ, im zweiten Fall definiert E_- eine Spiegelung an der durch $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ_1}$ bestimmten Geraden, und im dritten Fall entsteht das Koordinatensystem $\overrightarrow{OQ_1}$, $\overrightarrow{OQ_2}$ aus dem Koordinatensystem $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ durch die Spiegelung E_- und eine nachfolgende Drehung um den Winkel φ.

Man beweist leicht folgende Aussagen.

III. *Die isometrischen linearen Operatoren des zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes bilden eine Gruppe $\mathfrak{D}_2$ bezüglich der für lineare Operatoren erklärten Multiplikation.*

Die Drehungen des zweidimensionalen euklidischen Raumes bilden eine Gruppe $\mathfrak{d}_2$ bezüglich der für lineare Operatoren erklärten Multiplikation.

Die Matrizen der Form (11) *bilden eine Gruppe $O(2)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation.*

Die Matrizen der Form U_+ bilden eine Gruppe $O_+(2)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Die Gruppe $\mathfrak{D}_2$ heißt die *allgemeine zweidimensionale Drehgruppe*. Die Gruppe $\mathfrak{d}_2$ heißt die *zweidimensionale Drehgruppe*.

Die Matrizen der Form (11) nennt man *zweireihige orthogonale Matrizen*, die Matrizen U_+ *zweireihige eigentlich orthogonale Matrizen*. Im Unterschied dazu werden die Matrizen U_- häufig *zweireihige uneigentlich orthogonale Matrizen* genannt.

Die Gruppe $O(2)$ heißt die *zweireihige orthogonale Gruppe*. Die Gruppe $O_+(2)$ heißt die *zweireihige eigentlich orthogonale Gruppe*.

Die im Satz II angegebenen Beziehungen zwischen isometrischen linearen Operatoren und orthogonalen Matrizen können wir wie folgt zusammenfassen:

IV. *Ist $\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(2)}$, so ist $\Phi_{\mathfrak{B}}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der allgemeinen Drehgruppe auf die Gruppe der orthogonalen Matrizen. Dabei entsprechen den Drehungen eigentlich orthogonale Matrizen und den Drehspiegelungen uneigentlich orthogonale Matrizen. Es gilt*

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(U_1 U_2) = \Phi_{\mathfrak{B}}(U_1) \cdot \Phi_{\mathfrak{B}}(U_2).$$

Diese Gleichung haben wir früher allgemein für die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{B}}$ bewiesen (vgl. § 11, Nr. 3).

3.* DER PSEUDO-EUKLIDISCHE ZWEIDIMENSIONALE VEKTORRAUM; ISOTROPE VEKTOREN; KLASSIFIKATION DER ANISOTROPEN VEKTOREN; DIE WINKEL ZWISCHEN ANISOTROPEN VEKTOREN GLEICHER ART; ISOMETRIEN; CHARAKTERISIERUNG DER ISOMETRISCHEN OPERATOREN; HYPERBOLISCHE DREHUNGEN; ZWEIDIMENSIONALE LORENTZTRANSFORMATIONEN

Es sei nun q_0 eine indefinite quadratische Form auf dem zweidimensionalen linearen Vektorraum $V^{(2)}$. In diesem Fall sprechen wir von einem *zweidimensionalen pseudoeuklidischen Vektorraum $V^{(2)}$*.

Die Vektoren $x \in V^{(2)}$, für die $q_0(x) = 0$ ist, heißen *isotrop*. Ist $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ eine Normalbasis für die quadratische Form q_0, so *ist* $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ *dann und nur dann ein isotroper Vektor, wenn*

$$q_0(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0, \quad d.h. \quad \xi_1 = \pm\xi_2$$

ist.

Diejenigen Vektoren $x \in V^{(2)}$, für die $q_0(x) \neq 0$ ist, heißen *anisotrop*.

Die anisotropen Vektoren eines pseudo-euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$ zerfallen in bezug auf eine Normalbasis $\mathfrak{B} = \{x_1, x_2\}$ für die Form q_0 in vier Arten:

$$1.\ x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2: \quad q_0(x) > 0, \quad \xi_1 > 0,$$

$$2.\ x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2: \quad q_0(x) > 0, \quad \xi_1 < 0,$$

$$3.\ x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2: \quad q_0(x) < 0, \quad \xi_2 > 0,$$

$$4.\ x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2: \quad q_0(x) < 0, \quad \xi_2 < 0.$$

Bezeichnen wir $\sqrt{q_0(x)}$ wiederum als „Länge" des Vektors x, so hat dieser Ausdruck mit den gewöhnlichen Vorstellungen einer Länge wenig gemein. Zunächst haben die isotropen Vektoren die Länge 0, obwohl sie selbst vom Nullvektor verschieden sein können. Für die anisotropen Vektoren erster und zweiter Art ist $\sqrt{q_0(x)}$ eine positive Zahl, wenn wir uns auf die positive Wurzel beschränken, und für diese Vektoren ist der Begriff „Länge" auch noch am ehesten sinnvoll. Für die anisotropen Vektoren dritter und vierter Art ist $\sqrt{q_0(x)}$ rein imaginär, so daß diese Vektoren eine imaginäre Länge besitzen. Unter $\sqrt{q_0(x)}$ verstehen wir in diesem Fall die komplexe Zahl $i_+\sqrt{|q_0(x)|}$.

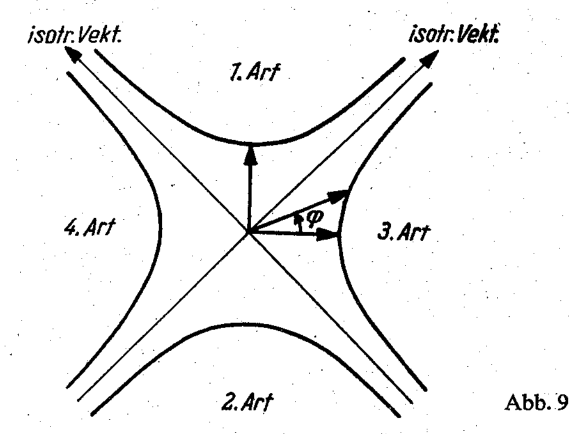


Abb. 9

6⁰. Veranschaulichen wir uns dies in der Ebene (wobei wir beachten müssen, daß sich die Verhältnisse des pseudo-euklidischen Vektorraumes nur sehr unvollkommen in der Ebene widerspiegeln, da Längen und Winkel in der Ebene nicht mehr wie im euklidischen Fall den Längen und Winkeln im Vektorraum entsprechen), so liegen die Repräsentanten der isotropen Vektoren auf den 45°-

Linien. Diese zerlegen die Ebene in vier Winkelräume, die den vier Arten anisotroper Vektoren entsprechen. Die Koordinaten gleichartiger Vektoren gleicher, von Null verschiedener Länge bestimmen einen Hyperbelast in dem jeweiligen Winkelraum (Abb. 9).

Bezeichnet f_0 die der quadratischen Form q_0 entsprechende symmetrische Bilinearform, so erhalten wir ein Analogon zur Ungleichung (7) in der Form

$$q_0(\boldsymbol{x}) \cdot q_0(\boldsymbol{y}) \leqq (f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))^2. \tag{13}$$

Es sei $\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y} = \eta_1 \boldsymbol{x}_1 + \eta_2 \boldsymbol{x}_2$, und $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ bezeichne eine Normalbasis von $V^{(2)}$ in bezug auf die ausgezeichnete quadratische Form q_0. Wir berechnen

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2 \geqq 0.$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2 = \xi_1^2 \cdot \eta_2^2 + \xi_2^2 \cdot \eta_1^2 - 2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \geqq 0$$

oder

$$-2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \geqq -\xi_1^2 \cdot \eta_2^2 - \xi_2^2 \cdot \eta_1^2.$$

Daraus folgt

$$\xi_1^2 \cdot \eta_1^2 + \xi_2^2 \cdot \eta_2^2 - 2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \geqq \xi_1^2 \cdot \eta_1^2 + \xi_2^2 \cdot \eta_2^2 - \xi_1^2 \cdot \eta_2^2 - \xi_2^2 \cdot \eta_1^2,$$

und es ist

$$(\xi_1 \cdot \eta_1 - \xi_2 \cdot \eta_2)^2 \geqq (\xi_1^2 - \xi_2^2) \cdot (\eta_1^2 - \eta_2^2).$$

Da $q_0(\boldsymbol{x}) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, $q_0(\boldsymbol{y}) = \eta_1^2 - \eta_2^2$ und $f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \xi_1 \cdot \eta_1 - \xi_2 \cdot \eta_2$ ist, haben wir die Ungleichung (13) bewiesen.

Aus der Ungleichung (13) läßt sich die Ungleichung

$$1 \leqq \frac{f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{q_0(\boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{y})}} \tag{14}$$

für je zwei anisotrope Vektoren gleicher Art ableiten.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind Vektoren erster oder zweiter Art. Aus $q_0(\boldsymbol{x}) > 0$ und $q_0(\boldsymbol{y}) > 0$ folgt $\xi_1^2 > \xi_2^2$ und $\eta_1^2 > \eta_2^2$ oder $|\xi_1| > |\xi_2|$ und $|\eta_1| > |\eta_2|$. Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Vektoren erster Art, so ist $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$ und damit $\xi_1 \cdot \eta_1 = |\xi_1| \cdot |\eta_1| > \xi_2 \cdot \eta_2$. Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Vektoren zweiter Art, so ist $\xi_1 < 0$, $\eta_1 < 0$ und ebenfalls $\xi_1 \cdot \eta_1 = |\xi_1| \cdot |\eta_1| > \xi_2 \cdot \eta_2$. Es ist also

$$f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \xi_1 \cdot \eta_1 - \xi_2 \cdot \eta_2 > 0,$$

und wir erhalten die Ungleichung (14), wenn wir in (13) auf beiden Seiten die positive Wurzel ziehen und durch die positive reelle Zahl $\sqrt{q_0(\boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{y})}$ dividieren.

b) $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind Vektoren dritter oder vierter Art. Aus $q_0(\boldsymbol{x}) < 0$ und $q_0(\boldsymbol{y}) < 0$ folgt dann $\xi_2^2 > \xi_1^2$ und $\eta_2^2 > \eta_1^2$ oder $|\xi_2| > |\xi_1|$ und $|\eta_2| > |\eta_1|$. Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Vektoren dritter Art, so ist $\xi_2 > 0$, $\eta_2 > 0$ und folglich $\xi_2 \cdot \eta_2 = |\xi_2| \cdot |\eta_2| > \xi_1 \cdot \eta_1$. Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Vektoren vierter Art, so ist $\xi_2 < 0$, $\eta_2 < 0$ und ebenfalls $\xi_2 \cdot \eta_2 = |\xi_2| \cdot |\eta_2| > \xi_1 \cdot \eta_1$. Es ist also

$$f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \xi_1 \cdot \eta_1 - \xi_2 \cdot \eta_2 = -|f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| < 0.$$

Andererseits ist

$$q_0(\boldsymbol{x}) = -|q_0(\boldsymbol{x})|, \quad q_0(\boldsymbol{y}) = -|q_0(\boldsymbol{y})|.$$

Aus der Ungleichung (13) folgt

$$_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{x})|} \cdot {}_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{y})|} \leqq |f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$$

und damit

$$i_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{x})|} \cdot i_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{y})|} \geqq -|f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|.$$

Dividieren wir diese Ungleichung durch die negative Zahl $\sqrt{q_0(\boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{y})} = i_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{x})|} \cdot i_+\sqrt{|q_0(\boldsymbol{y})|}$, so erhalten wir die Ungleichung (14).

Die Ungleichung (14) ermöglicht die Definition von *Winkeln zwischen zwei anisotropen Vektoren gleicher Art.* Durch die Gleichung

$$\cosh \varphi \underset{\text{Def.}}{=} \frac{f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{q_0(\boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{y})}} \tag{15}$$

werden zwei Winkel φ_1 und φ_2 definiert, die sich zu 0 ergänzen und die wir die *Winkel zwischen den anisotropen Vektoren* $\boldsymbol{x}$ *und* $\boldsymbol{y}$ *gleicher Art* nennen.

Es sei

$$\varphi_1 = \measuredangle_1 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \geqq 0, \quad \varphi_2 = \measuredangle_2 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \leqq 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

Berücksichtigen wir die Gleichung

$$2 \cdot f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q_0(\boldsymbol{x}) + q_0(\boldsymbol{y}) - q_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

so erhalten wir für je zwei anisotrope Vektoren gleicher Art

$$q_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = q_0(\boldsymbol{x}) + q_0(\boldsymbol{y}) - 2 \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{q_0(\boldsymbol{y})} \cdot \cosh \varphi_1. \tag{15'}$$

Diese Gleichung entspricht der oben bewiesenen Gleichung (8') und wird *hyperbolischer Cosinussatz* genannt.

Die Vektoren $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ einer Normalbasis für die quadratische Form q_0 genügen den Gleichungen

$$q_0(\boldsymbol{x}_1) = 1, \quad q_0(\boldsymbol{x}_2) = -1; \quad f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0. \tag{16}$$

Aus der letzten Gleichung läßt sich keine Aussage über die Winkel zwischen diesen Vektoren gewinnen, da die Vektoren einer Normalbasis nicht von der gleichen Art sind.

Umgekehrt zeigt man leicht, daß *je zwei Vektoren* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V^{(2)}$, *für die die Gleichungen* (16) *gelten, eine Normalbasis für die quadratische Form* q_0 *bilden.*

Es sei $V'^{(2)}$ ein weiterer zweidimensionaler pseudo-euklidischer Vektorraum mit der indefiniten quadratischen Form q_0' und der zugehörigen symmetrischen Bilinearform f_0'. Ist $\mathfrak{B}' = \{\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2'\}$ eine Normalbasis von $V'^{(2)}$ in bezug auf die quadratische Form q_0', $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis von $V^{(2)}$ in bezug auf die quadratische Form q_0 und $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1 + \xi_2\boldsymbol{x}_2$, so wird durch

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1' + \xi_2\boldsymbol{x}_2'$$

eine Abbildung $\boldsymbol{I}$ von $V^{(2)}$ auf $V'^{(2)}$ definiert. Wie im Fall des euklidischen Vektorraumes überzeugt man sich, daß $\boldsymbol{I}$ ein Isomorphismus des pseudo-euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$ auf den pseudo-euklidischen Vektorraum $V'^{(2)}$ ist. Überdies gilt für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V^{(2)}$

$$f_0'(\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{y}) = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{17}$$

Den Isomorphismus $\boldsymbol{I}$, für den die Gleichung (17) gilt, nennt man einen *isometrischen Isomorphismus* oder eine *Isometrie*, und die pseudo-euklidischen Vektorräume $V^{(2)}$ und $V'^{(2)}$ heißen *isometrisch isomorph*.

Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

V. *Zwei zweidimensionale pseudo-euklidische Vektorräume sind isometrisch isomorph.*

Dieser Satz berechtigt uns, von *dem* (bis auf Isometrie eindeutig bestimmten) zweidimensionalen pseudo-euklidischen Vektorraum zu sprechen.

Die *isometrischen linearen Operatoren* eines zweidimensionalen pseudo-euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$ lassen sich wie folgt charakterisieren:

VI. *Ein isometrischer linearer Operator* $A \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ *bildet eine Normalbasis von* $V^{(2)}$ *für die quadratische Form* q_0 *auf eine Normalbasis von* $V^{(2)}$ *für diese quadratische Form ab. Ist* $A \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ *ein linearer Operator, der eine Normalbasis von* $V^{(2)}$ *für die quadratische Form* q_0 *wieder auf eine Normalbasis für diese quadratische Form abbildet, so ist* A *isometrisch.*

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ *eine Normalbasis von* $V^{(2)}$ *für die quadratische Form* q_0 *und* A *ein isometrischer linearer Operator, so ist*

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(A) = A_+^{(1)} = \begin{Vmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{oder} \quad \Phi_{\mathfrak{B}}(A) = A_-^{(1)} = \begin{Vmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ \sinh\varphi & -\cosh\varphi \end{Vmatrix}$$

oder (18)

$$\Phi_{\mathfrak{B}}(A) = A_-^{(2)} = \begin{Vmatrix} -\cosh\varphi & \sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{oder} \quad \Phi_{\mathfrak{B}}(A) = A_+^{(2)} = \begin{Vmatrix} -\cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & -\cosh\varphi \end{Vmatrix}.$$

Dabei ist φ einer der beiden Winkel zwischen $\boldsymbol{x}_1$ und $A\boldsymbol{x}_1$ bzw. zwischen $\boldsymbol{x}_1$ und $-A\boldsymbol{x}_1$.

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis von $V^{(2)}$ für die quadratische Form q_0 und $\varphi\,(-\infty < \varphi < +\infty)$ ein gegebener Winkel, so ist der durch die Matrix

$$\left.\begin{array}{l} A_+^{(1)} = \begin{Vmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{oder} \quad A_-^{(1)} = \begin{Vmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ \sinh\varphi & -\cosh\varphi \end{Vmatrix} \\ \textit{oder} \\ A_-^{(2)} = \begin{Vmatrix} -\cosh\varphi & \sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{Vmatrix} \quad \textit{oder} \quad A_+^{(2)} = \begin{Vmatrix} -\cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & -\cosh\varphi \end{Vmatrix} \end{array}\right\} \quad (18)$$

bestimmte lineare Operator $A \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ isometrisch.

Zum Beweis sei $A \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein isometrischer Operator, dann gilt

$$q_0(A\boldsymbol{x}_1) = f_0(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_1) = f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = q_0(\boldsymbol{x}_1) = 1,$$
$$q_0(A\boldsymbol{x}_2) = f_0(A\boldsymbol{x}_2, A\boldsymbol{x}_2) = f_0(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = q_0(\boldsymbol{x}_2) = -1,$$
$$f_0(A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2) = f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0,$$

und folglich ist $A\mathfrak{B} = \{A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis von $V^{(2)}$ für die quadratische Form q_0.

Ist $A\mathfrak{B} = \{A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis von $V^{(2)}$ für die quadratische Form q_0 und sind $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1 + \xi_2\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y} = \eta_1\boldsymbol{x}_1 + \eta_2\boldsymbol{x}_2$ beliebige Vektoren aus $V^{(2)}$, so gilt

$$f_0(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = f_0(\xi_1 A\boldsymbol{x}_1 + \xi_2 A\boldsymbol{x}_2, \eta_1 A\boldsymbol{x}_1 + \eta_2 A\boldsymbol{x}_2) = \xi_1\cdot\eta_1 - \xi_2\cdot\eta_2,$$

und es ist

$$f_0(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Der Operator A ist also isometrisch, und die ersten beiden Behauptungen von Satz VI sind bewiesen.

Es sei nun A isometrisch und

$$A\boldsymbol{x}_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{x}_2, \quad A\boldsymbol{x}_2 = \alpha_{12}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{x}_2.$$

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ eine Normalbasis von $V^{(2)}$ für die quadratische Form q_0, so gilt

$$f_0(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = f_0(\alpha_{11}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = \alpha_{11}\cdot q_0(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_{21}\cdot f_0(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = \alpha_{11}.$$

Da $q_0(A\boldsymbol{x}_1) = 1 > 0$ ist, kann $A\boldsymbol{x}_1$ nur ein Vektor erster oder zweiter Art sein. Ist $A\boldsymbol{x}_1$ ein Vektor erster Art, so gilt

$$f_0(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = \sqrt{q_0(A\boldsymbol{x}_1)}\cdot\sqrt{q_0(\boldsymbol{x}_1)}\cdot\cosh\varphi = \cosh\varphi.$$

Ist $A\boldsymbol{x}_1$ ein Vektor zweiter Art, so ist $-A\boldsymbol{x}_1$ ein Vektor erster Art und

$$f_0(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = -f_0(-A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = -\cosh\varphi.$$

Es ist also

$$\alpha_{11} = \cosh\varphi \quad \text{oder} \quad \alpha_{11} = -\cosh\varphi,$$

je nachdem, ob Ax_1 ein Vektor erster oder zweiter Art ist. Dabei bezeichnet φ einen der Winkel zwischen x_1 und Ax_1 bzw. zwischen x_1 und $-Ax_1$. Da nun ferner $q_0(Ax_1) = \alpha_{11}^2 - \alpha_{21}^2 = 1$ ist, setzen wir

$$\alpha_{21} = \sinh\varphi \quad \text{oder} \quad \alpha_{21} = -\sinh\varphi,$$

je nachdem, ob $\alpha_{11} = \cosh\varphi$ oder $\alpha_{11} = -\cosh\varphi$ ist. Damit ist der Winkel φ eindeutig bestimmt. Ist Ax_1 ein Vektor erster Art und $\alpha_{21} > 0$, so ist $\varphi = \measuredangle_1 [x_1, Ax_1]$; ist $\alpha_{21} < 0$, so ist $\varphi = \measuredangle_2 [x_1, Ax_1]$. Ist Ax_1 ein Vektor zweiter Art und $\alpha_{21} > 0$, so ist $\varphi = \measuredangle_2 [x_1, -Ax_1]$, und ist $\alpha_{21} < 0$, so ist $\varphi = \measuredangle_1 [x_1, -Ax_1]$. Aus der Gleichung $f_0(Ax_1, Ax_2) = \alpha_{11}\cdot\alpha_{12} - \alpha_{21}\cdot\alpha_{22} = 0$ folgt

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \frac{\cosh\varphi}{\sinh\varphi} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}},$$

und da ferner $q_0(Ax_2) = \alpha_{12}^2 - \alpha_{22}^2 = -1$ ist, ergibt sich

$$\alpha_{12} = \sinh\varphi, \quad \alpha_{22} = \cosh\varphi \quad \text{oder} \quad \alpha_{12} = -\sinh\varphi, \quad \alpha_{22} = -\cosh\varphi.$$

Ist $\alpha_{21} = 0$ und $\alpha_{11} = 1$, so ist $\varphi = \measuredangle [x_1, Ax_1] = 0$, und die Matrix $A_+^{(1)}$ ist die Einheitsmatrix, während $A_-^{(1)}$ gleich

$$E_-^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{12}$$

ist. Ist $\alpha_{21} = 0$ und $\alpha_{11} = -1$, so ist $\varphi = \measuredangle [x_1, -Ax_1] = 0$, und die Matrix $A_-^{(2)}$ ist gleich

$$E_-^{(2)} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

während $A_+^{(2)}$ die negative Einheitsmatrix ist.

Es sei schließlich A der durch

$$Ax_1 = \pm\cosh\varphi x_1 \pm \sinh\varphi x_2, \quad Ax_2 = \pm\sinh\varphi x_1 \pm \cosh\varphi x_2$$

bzw.

$$Ax_1 = \pm\cosh\varphi x_1 \pm \sinh\varphi x_2, \quad Ax_2 = \mp\sinh\varphi x_1 \mp \cosh\varphi x_2$$

definierte lineare Operator. Dann ist

$$q_0(Ax_1) = \cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1, \quad q_0(Ax_2) = \sinh^2\varphi - \cosh^2\varphi = -1,$$

$$f_0(Ax_1, Ax_2) = \cosh\varphi\cdot\sinh\varphi - \sinh\varphi\cdot\cosh\varphi = 0,$$

und aus der bereits bewiesenen zweiten Aussage von Satz VI folgt, daß A ein isometrischer Operator ist.

Bezeichnen $A_+^{(1)}$, $A_-^{(1)}$, $A_+^{(2)}$, $A_-^{(2)}$ die in (18) angegebenen Matrizen, so gelten die Gleichungen

$$A_-^{(1)} = A_+^{(1)} \cdot E_-^{(1)}, \quad A_-^{(2)} = A_+^{(1)} \cdot E_-^{(2)}, \quad A_+^{(2)} = A_+^{(1)} \cdot E_-^{(1)} \cdot E_-^{(2)}.$$

Ferner ist

$$\det |A_+^{(1)}| = \det |A_+^{(2)}| = \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1,$$

$$\det |A_-^{(1)}| = \det |A_-^{(2)}| = \sinh^2 \varphi - \cosh^2 \varphi = -1.$$

Ist $A \in \mathscr{A}(V^{(2)})$ ein isometrischer linearer Operator, der die Art der Vektoren ungeändert läßt und dessen Determinante gleich 1 ist, so heißt A eine *hyperbolische Drehung* des pseudo-euklidischen Vektorraumes $V^{(2)}$. In diesem Fall gilt

$$\Phi_{\mathfrak{B}} A = A_+^{(1)}.$$

Ist $E_-^{(1)}$ der durch $E_-^{(1)}$ definierte isometrische Operator, so nennen wir $E_-^{(1)}$ die *Spiegelung am Vektor* x_1.

Ist $E_-^{(2)}$ der durch $E_-^{(2)}$ definierte isometrische Operator, so nennen wir $E_-^{(2)}$ die *Spiegelung am Vektor* x_2.

Ist A ein isometrischer linearer Operator, so gilt

$$A = A'_+ \quad \text{oder} \quad A = A'_+ E_-^{(1)} \quad \text{oder} \quad A = A'_+ E_-^{(2)} \quad \text{oder} \quad A = A'_+ E_-^{(1)} E_-^{(2)},$$

wobei A'_+ eine *hyperbolische Drehung* bezeichnet.

Ein isometrischer Operator A des zweidimensionalen pseudo-euklidischen Raumes, für den $\det A = 1$ gilt, läßt sich durch eine hyperbolische Drehung oder durch eine Spiegelung an zwei Vektoren einer Normalbasis für die quadratische Form q_0 und eine nachfolgende hyperbolische Drehung beschreiben. Ist $\det A = -1$, so erhält man den isometrischen Operator A durch eine Spiegelung an einem Vektor einer Normalbasis für die quadratische Form q_0 und eine darauffolgende hyperbolische Drehung.

Man beweist leicht folgende Aussagen:

VII. *Die isometrischen linearen Operatoren des zweidimensionalen pseudo-euklidischen Vektorraumes bilden eine Gruppe* $\mathfrak{L}_{2,1}$ *in bezug auf die für lineare Operatoren erklärte Multiplikation.*

Die isometrischen linearen Operatoren des zweidimensionalen pseudo-euklidischen Vektorraumes, deren Determinante gleich 1 *ist, bilden eine Gruppe* $\mathfrak{L}_{2,1}^+$ *in bezug auf die für lineare Operatoren erklärte Multiplikation.*

Die hyperbolischen Drehungen des zweidimensionalen pseudo-euklidischen Raumes bilden eine Gruppe $\mathfrak{l}_{2,1}$ *in bezug auf die für lineare Operatoren erklärte Multiplikation.*

Die Matrizen der Form (18) *bilden eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.*

Die Matrizen der Form $A_+^{(1)}$ oder $A_+^{(2)}$ bilden eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Die Matrizen der Form $A_+^{(1)}$ bilden eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Der zweidimensionale pseudo-euklidische Vektorraum und die oben betrachteten isometrischen Operatoren spielen in der Relativitätstheorie eine Rolle, wenn man zwei räumliche Koordinaten des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums ungeändert läßt. Man setzt dann $\xi_1 = c \cdot t$, wobei c als Lichtgeschwindigkeit und t als Zeitkoordinate interpretiert wird, und betrachtet $\xi_2 = \xi$ als die variable dritte Raumkoordinate.

Die Vektoren erster und zweiter Art nennt man *zeitartige* Vektoren, die Vektoren dritter und vierter Art heißen *raumartig*. Die physikalisch sinnvollen linearen Operatoren sind die hyperbolischen Drehungen der Gruppe $\mathfrak{l}_{2,1}$, die die Art der betrachteten Vektoren ungeändert lassen. Wir wollen für diese Drehungen eine andere Darstellung ableiten, die in der Physik verwendet wird.

Es sei A eine hyperbolische Drehung und

$$y_1 = Ax_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2, \quad y_2 = Ax_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2.$$

Dann ist y_1 ein Vektor erster Art, und wir setzen

$$\alpha_{11} = c \cdot t_0, \quad \alpha_{21} = \xi_0, \tag{20}$$

da α_{11} die erste Koordinate des Vektors Ax_1 ist, die wir als c-faches der Zeitkoordinate interpretiert haben, während die zweite Koordinate α_{21} als Raumkoordinate zu interpretieren ist.

Aus den Gleichungen

$$q_0(y_1) = \alpha_{11}^2 - \alpha_{21}^2 = 1, \quad q_0(y_2) = \alpha_{12}^2 - \alpha_{22}^2 = -1,$$

$$f_0(y_1, y_2) = \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{22} = 0$$

erhalten wir

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}.$$

Da für eine hyperbolische Drehung α_{11} und α_{22} positiv sind, müssen wir die positive Wurzel wählen.

Berücksichtigen wir die Gleichungen (20) und interpretieren den Quotienten $\dfrac{\xi_0}{t_0} = v$ als Geschwindigkeit, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, & \alpha_{12} &= \frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ \alpha_{21} &= \frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, & \alpha_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ist $x \in V^{(2)}$ ein beliebiger Vektor und bezeichnen ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 seine Koordinaten in bezug auf die Normalbasis $\mathfrak{B}_1 = \{x_1, x_2\}$ bzw. $\mathfrak{B} = \{y_1, y_2\}$ für die quadratische Form q_0, so gilt

$$\xi_1 = \alpha_{11} \cdot \eta_1 + \alpha_{12} \cdot \eta_2, \quad \xi_2 = \alpha_{21} \cdot \eta_1 + \alpha_{22} \cdot \eta_2.$$

Setzen wir

$$\xi_1 = c \cdot t, \quad \eta_1 = c \cdot t'; \quad \xi_2 = \xi, \quad \eta_2 = \xi'$$

und berücksichtigen die Gleichungen (21), so erhalten wir die Transformationsgleichungen der Koordinaten

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot \xi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \xi = \frac{v \cdot t' + \xi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22}$$

Die durch diese Gleichungen gegebene Transformation wird in der Relativitätstheorie *zweidimensionale Lorentztransformation* genannt.

Die Gruppe $\mathfrak{L}_{2,1}$ heißt die zweidimensionale vollständige Lorentzgruppe.

Die Gruppe $\mathfrak{L}_{2,1}^{+}$ heißt die zweidimensionale allgemeine Lorentzgruppe.

Die Gruppe $\mathfrak{l}_{2,1}$ heißt die zweidimensionale spezielle Lorentzgruppe. $_*$

4. AUFGABEN

1. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten des Gleichheitszeichens in der Dreiecksungleichung an.

2. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten des Gleichheitszeichens in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung an.

3. Man beweise die Sätze III und VII.

4. Sind $V^{(2)}$ und $V'^{(2)}$ zweidimensionale euklidische Vektorräume und I_1, I_2 isometrische Isomorphismen von $V^{(2)}$ auf $V'^{(2)}$, so gibt es einen isometrischen Operator $U \in \mathscr{A}(V^{(2)})$, so daß

$$I_2 = I_1 U,$$

und einen isometrischen Operator $U' \in \mathscr{A}(V'^{(2)})$, so daß

$$I_2 = U' I_1$$

ist.

§ 16. DER n-DIMENSIONALE EUKLIDISCHE VEKTORRAUM

1. EINLEITUNG

In diesem und den folgenden Paragraphen wird die Struktur eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes untersucht. Als Vorbild dienen die Überlegungen des § 15, die den zweidimensionalen euklidischen Vektorraum betreffen. Die auf einem euklidischen Vektorraum ausgezeichnete positiv definite quadratische Form gestattet auch im allgemeinen Fall die Definition der Norm oder Länge eines Vektors sowie zweier Winkel zwischen zwei Vektoren. Im folgenden Paragraphen wird darüber hinaus das Volumen des von m Vektoren eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes bestimmten Parallelepipeds definiert. Die genannten Begriffe sind typisch für die Theorie der euklidischen Vektorräume, da sie erst durch die Auszeichnung einer positiv definiten quadratischen Form definierbar werden. Die ausgezeichnete quadratische Form wird auch *metrische Fundamentalform* des euklidischen Vektorraumes genannt.

2. SKALARPRODUKT UND NORM; DIE DREIECKSUNGLEICHUNG; DIE CAUCHY-SCHWARZSCHE UNGLEICHUNG; ORTHOGONALITÄT [1]

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, q_0 die auf V ausgezeichnete positiv definite quadratische Form und f_0 die zugehörige symmetrische Bilinearform. Wie im Fall eines zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes bezeichnen wir die Bilinearform f_0 mit runden Klammern:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \underset{\text{Def.}}{=} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V) \tag{1}$$

und nennen den Wert $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ das *Skalarprodukt* oder das *innere Produkt* der Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Wir erinnern an die Symmetrie und Bilinearität der Form f_0, die wir als Eigenschaften des Skalarproduktes zweier Vektoren wie folgt formulieren:

1. Für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt

   $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2. Für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ und jede reelle Zahl $\alpha \in R$ gilt

   $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

3. Für je drei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ und $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \in V$ gilt

   $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2), \quad (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$.

Für jeden Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ ist $q_0(\boldsymbol{x}) = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, und da die Form q_0 als positiv definit vorausgesetzt ist, erhalten wir eine weitere Eigenschaft des Skalarproduktes:

4. Für jeden Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ gilt

   $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$,

   und ist $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, so ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ der Nullvektor.

Die *Norm* oder *Länge* eines Vektors $\boldsymbol{x} \in V$ definieren wir durch die Gleichung

$$|\boldsymbol{x}| \underset{\text{Def.}}{=} {}_+\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{2}$$

und beweisen die folgenden Eigenschaften der Norm:

a) $|\boldsymbol{x}| \geqq 0$, und aus $|\boldsymbol{x}| = 0$ folgt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$;

b) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|$, wobei $|\alpha|$ den gewöhnlichen Betrag der reellen Zahl α bezeichnet;

c) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

---

[1] Der Leser überzeuge sich, daß die Ausführungen von Nr. 2 auch für unendlichdimensionale Vektorräume, auf denen eine positiv definite quadratische Form ausgezeichnet ist, gelten.

Die Aussagen a) und b) ergeben sich unmittelbar aus den Eigenschaften 4 und 2 des Skalarproduktes, und es bleibt nur die *Dreiecksungleichung* c) zu beweisen. Die Dreiecksungleichung läßt sich wie im Fall des zweidimensionalen euklidischen Vektorraumes aus der *Cauchy-Schwarzschen Ungleichung* folgern. (Der Leser überzeuge sich, daß bei der Ableitung der Dreiecksungleichung aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in § 15, Nr. 2 die Dimension des betrachteten euklidischen Vektorraumes nicht berücksichtigt wurde).

Wir beweisen die *Ungleichung von* CAUCHY-SCHWARZ und bemerken zunächst: Ein Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ heißt *normiert*, wenn $|\boldsymbol{x}| = 1$ ist. Ist $\boldsymbol{x} \in V$ ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor, so ist $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ ein normierter Vektor. Nach b) gilt nämlich $\left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|}|\boldsymbol{x}| = 1$.

Es seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren aus V, und $\boldsymbol{x}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$, $\boldsymbol{y}_1 = \dfrac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}$ seien die zugehörigen normierten Vektoren. Dann ist

$$0 \leqq (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) + (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1) - 2 \cdot (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1),$$

und da $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = |\boldsymbol{x}_1|^2 = 1 = |\boldsymbol{y}_1|^2 = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1)$ ist, ergibt sich nach Division durch 2

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) \leqq 1.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit der positiven reellen Zahl $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$ und berücksichtigen die Gleichungen $\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\, \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y}|\, \boldsymbol{y}_1$, so erhalten wir

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|.$$

Diese Ungleichung ist offenbar auch dann richtig, wenn $\boldsymbol{x}$ oder $\boldsymbol{y}$ der Nullvektor ist. Ersetzen wir $\boldsymbol{x}$ durch $-\boldsymbol{x}$, so folgt

$$-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|,$$

und damit ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \tag{3}$$

bewiesen.

Sind die Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ vom Nullvektor verschieden, so ist $|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \neq 0$, und wir erhalten die Ungleichung

$$-1 \leqq \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} \leqq 1. \tag{3'}$$

Diese ermöglicht die Definition von Winkeln φ durch

$$\cos \varphi \underset{\text{Def.}}{=} \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|}. \tag{4}$$

Nehmen wir an, daß $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ ist, so bestimmt die Gleichung (4) zwei Winkel φ_1 und φ_2 zwischen den vom Nullvektor verschiedenen Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$, die sich zu 2π ergänzen. Wir schreiben

$$\varphi_1 = \sphericalangle_1 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \quad \varphi_2 = \sphericalangle_2 [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$$

und wählen den Winkel φ_1 so, daß $0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi$ ist. Den *Cosinussatz*

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2 \cdot |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cdot \cos \varphi_1 \tag{5}$$

beweist man wie in § 15, Nr. 2.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, für die

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

ist, werden *zueinander orthogonale* Vektoren genannt.

Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß der Nullvektor $\boldsymbol{o}$ zu jedem Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ orthogonal ist. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ sind nach (4) dann und nur dann orthogonal, wenn $\sphericalangle_1[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \frac{\pi}{2}$ ist.

3. ORTHONORMALBASEN; DAS E. SCHMIDTSCHE ORTHOGONALISIERUNGSVERFAHREN

Es sei $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ eine Normalbasis für die auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V ausgezeichnete quadratische Form. Dann gilt

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet. Die Gleichungen (6) lassen sich auch in der Form

$$|\boldsymbol{x}_i| = 1, \quad (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \ldots, n) \tag{6'}$$

schreiben.

Eine Normalbasis $\mathfrak{B}_0$ für die ausgezeichnete quadratische Form besteht aus n normierten, paarweise orthogonalen Vektoren von V.

Wir nennen eine solche Basis eine *Orthonormalbasis* des euklidischen Vektorraumes V und beweisen, daß je n normierte, paarweise orthogonale Vektoren aus V eine Orthonormalbasis bilden. Es genügt zu zeigen:

I. *Je m paarweise orthogonale, vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind linear unabhängig.*

Es seien $y_1, \ldots, y_m$ paarweise orthogonale, vom Nullvektor verschiedene Vektoren, und es sei $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = o$. Dann ist für $1 \leqq i \leqq m$

$$0 = (o, y_i) = (\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m, y_i)$$
$$= \alpha_1 \cdot (y_1, y_i) + \cdots + \alpha_i \cdot (y_i, y_i) + \cdots + \alpha_m \cdot (y_m, y_i) = \alpha_i,$$

und Satz I ist bewiesen.

Ist $n = \dim V$ und sind die Vektoren $y_1, \ldots, y_n$ normiert und paarweise orthogonal, so sind sie vom Nullvektor verschieden und folglich linear unabhängig. Die Vektoren $y_1, \ldots, y_n$ bilden also eine Basis $\mathfrak{B}$ von V, und da sie orthogonal und normiert sind, gilt für $x = \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_n y_n$

$$(x, x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (y_{i'}, y_i) \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

und $\mathfrak{B}$ ist eine Normalbasis für die gegebene quadratische Form oder eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraumes V.

Zusammenfassend formulieren wir den Satz

II. *In einem euklidischen Vektorraum der Dimension n gibt es n paarweise orthogonale vom Nullvektor verschiedene Vektoren. Je n normierte, paarweise orthogonale Vektoren von V bilden eine Orthonormalbasis. Sind $n + 1$ Vektoren von V paarweise orthogonal, so ist einer der Nullvektor.*

Wir wollen nun ein Verfahren kennenlernen, mit dessen Hilfe wir aus einer gegebenen Basis eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes eine Orthonormalbasis gewinnen können. Es handelt sich dabei um das sogenannte *E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.*

Es sei $\mathfrak{B}_1 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ eine beliebige Basis von V. Da $y_1 \neq 0$ ist, können wir y_1 normieren und erhalten

$$x_1 = \frac{y_1}{|y_1|}.$$

Es gilt

$$|x_1| = 1; \quad L(\{x_1\}) = L(\{y_1\}).$$

Wir setzen $z_2 = y_2 + \alpha_{21} x_1$ und wählen α_{21} so, daß

$$(z_2, x_1) = (y_2, x_1) + \alpha_{21} = 0$$

ist. Dann ist z_2 ein zu x_1 orthogonaler vom Nullvektor verschiedener Vektor. Wäre $z_2 = o$, so wäre $y_2 \in L(\{x_1\})$, und da $L(\{x_1\}) = L(\{y_1\})$ ist, wären die Vektoren y_1 und y_2 linear abhängig. Wir normieren den Vektor z_2 und erhalten

$$x_2 = \frac{z_2}{|z_2|}.$$

Es gilt

$$|x_1| = |x_2| = 1, \quad (x_1, x_2) = 0; \quad L(\{x_1, x_2\}) = L(\{y_1, y_2\}).$$

Wir setzen $z_3 = y_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2$ und wählen α_{31} und α_{32} so, daß

$$(z_3, x_1) = (y_3, x_1) + \alpha_{31} = 0,$$

$$(z_3, x_2) = (y_3, x_2) + \alpha_{32} = 0$$

ist. Dann ist z_3 ein zu den Vektoren x_1, x_2 orthogonaler, vom Nullvektor verschiedener Vektor. Wäre $z_3 = o$, so wäre $y_3 \in L(\{x_1, x_2\})$, und da $L(\{x_1, x_2\}) = L(\{y_1, y_2\})$ ist, wären die Vektoren y_1, y_2, y_3 linear abhängig. Wir normieren den Vektor z_3 und erhalten

$$x_3 = \frac{z_3}{|z_3|}.$$

Es gilt

$$|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1, \quad (x_1, x_2) = (x_1, x_3) = (x_2, x_3) = 0;$$

$$L(\{x_1, x_2, x_3\}) = L(\{y_1, y_2, y_3\}).$$

Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Wir nehmen an, daß die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ $(k < n)$ aus den Vektoren $y_1, \ldots, y_k$ durch das beschriebene Orthogonalisierungsverfahren hervorgegangen sind. Dann gilt

$$|x_i| = 1, \quad (x_i, x_j) = 0 \quad (i \neq j;\, i, j = 1, \ldots, k)$$

und

$$L(\{x_1, \ldots, x_k\}) = L(\{y_1, \ldots, y_k\}).$$

Wir setzen

$$z_{k+1} = y_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{k+1,k}x_k$$

und wählen $\alpha_{k+1,1}, \ldots, \alpha_{k+1,k}$ so, daß

$$(z_{k+1}, x_1) = (y_{k+1}, x_1) + \alpha_{k+1,1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(z_{k+1}, x_k) = (y_{k+1}, x_k) + \alpha_{k+1,k} = 0$$

ist. Dann ist z_{k+1} ein zu den Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ orthogonaler, vom Nullvektor verschiedener Vektor. Wäre $z_{k+1} = o$, so wäre $y_{k+1} \in L(\{x_1, \ldots, x_k\})$, und da $L(\{x_1, \ldots, x_k\}) = L(\{y_1, \ldots, y_k\})$ ist, wären die Vektoren $y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}$ linear abhängig. Den Vektor z_{k+1} können wir normieren und erhalten

$$x_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{|z_{k+1}|}.$$

Es gilt

$$|x_i| = 1, \quad (x_i, x_j) = 0 \quad (i \neq j;\, i, j, = 1, \ldots, k + 1),$$

$$L(\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}) = L(\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}).$$

Das E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren bricht nach n Schritten ab und ergibt n normierte, paarweise orthogonale Vektoren von V, also eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

1°. Betrachten wir den linearen Vektorraum R^n der n-tupel reeller Zahlen $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und zeichnen die positiv definite quadratische Form

$$q_0(x) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

aus, so wird R^n zu einem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in R^n$ wird durch die Gleichung

$$(x, y) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \cdots + \xi_n \cdot \eta_n$$

gegeben. Für die Norm des Vektors $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ gilt

$$|x| = {}_+\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

Die kanonische Basis

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

des linearen Vektorraumes R^n ist offenbar eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraumes R^n.

2°. Es sei R^3 der euklidische Vektorraum der Tripel $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ reeller Zahlen (vgl. 1°). Wir betrachten die Basis $\mathfrak{B}_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$:

$$y_1 = (1, 1, 0), \quad y_2 = (1, 0, 1), \quad y_3 = (0, 1, 1)$$

und wollen diese Basis orthogonalisieren.

Es ist

$$|y_1| = {}_+\sqrt{(y_1, y_1)} = {}_+\sqrt{2},$$

und wir setzen

$$x_1 = \left(\frac{1}{{}_+\sqrt{2}}, \frac{1}{{}_+\sqrt{2}}, 0\right).$$

Es sei

$$z_2 = y_2 + \alpha x_1$$

mit

$$\alpha = -(y_2, x_1) = -\frac{1}{{}_+\sqrt{2}},$$

d. h.

$$z_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Dann ist

$$|z_2| = {}_+\sqrt{(z_2, z_2)} = \frac{1}{2} \cdot {}_+\sqrt{6}$$

und

$$x_2 = \left(\frac{1}{{}_+\sqrt{6}}, -\frac{1}{{}_+\sqrt{6}}, \frac{2}{{}_+\sqrt{6}}\right).$$

Es ist $|x_1| = |x_2| = 1$, $(x_1, x_2) = 0$. Wir setzen

$$z_3 = y_3 + \beta x_1 + \gamma x_2$$

mit

$$\beta = -(y_3, x_1) = -\frac{1}{+\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \gamma = -(y_3, x_2) = -\frac{1}{+\sqrt{6}}$$

und erhalten

$$z_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Es ist

$$|z_3| = {}_+\sqrt{(z_3, z_3)} = \frac{2}{3} \cdot {}_+\sqrt{3}$$

und

$$x_3 = \left(-\frac{1}{+\sqrt{3}}, \frac{1}{+\sqrt{3}}, \frac{1}{+\sqrt{3}}\right).$$

Die Vektoren x_1, x_2, x_3 bilden eine Orthonormalbasis von R^3, denn es ist

$$|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1, \quad (x_1, x_2) = (x_1, x_3) = (x_2, x_3) = 0.$$

4. ORTHONORMALSYSTEME; BESSELSCHE UNGLEICHUNG UND PARSEVALSCHE GLEICHUNG

Es sei V wieder ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Wir betrachten einen linearen Teilraum W des linearen Vektorraumes V. Die auf V ausgezeichnete positiv definite quadratische Form ist auch eine positiv definite quadratische Form auf W. Den Teilraum W fassen wir als euklidischen Vektorraum mit dieser ausgezeichneten quadratischen Form auf und nennen ihn einen *euklidischen Teilraum* des euklidischen Vektorraumes V. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in W$ ist gleich dem Skalarprodukt dieser Vektoren, wenn man sie als Vektoren von V auffaßt. Das Skalarprodukt der Vektoren aus W bezeichnen wir ebenfalls mit (x, y).

Ist $\mathfrak{B}_1^{(1)} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ $(m \leqq n)$ eine beliebige Basis des euklidischen Teilraumes W, so läßt sie sich nach § 4, Nr. 4, Satz VIII zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ des ganzen Vektorraumes V ergänzen. Wenden wir auf diese Basis das E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, so erhalten wir nach m Schritten eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ von W, denn es ist

$$L(\{x_1, \ldots, x_m\}) = L(\{y_1, \ldots, y_m\}) = W.$$

Setzen wir das Verfahren fort, so ergibt sich nach n Schritten eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V.

III. *Ist W ein euklidischer Teilraum des euklidischen Vektorraumes V, so läßt sich jede Orthonormalbasis von W zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.*

Sind $x_1, \ldots, x_m$ normierte, paarweise orthogonale Vektoren aus V, so spannen diese Vektoren nach Satz I einen m-dimensionalen euklidischen Teilraum $W = L(\{x_1, \ldots, x_m\})$ auf, in dem sie eine Orthonormalbasis bilden.

Ein m-tupel $\{x_1, \ldots, x_m\}$ von normierten, paarweise orthogonalen Vektoren eines euklidischen Vektorraumes heißt ein *Orthonormalsystem*. Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, wenn $m = n$, d. h. $\{x_1, \ldots, x_m\}$ eine Orthonormalbasis von V ist. Satz III können wir dann wie folgt formulieren:

III'. *Jedes Orthonormalsystem eines euklidischen Vektorraumes läßt sich zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen.*

Es sei $\{x_1, \ldots, x_m\}$ $(m \leqq n)$ ein Orthonormalsystem und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein ergänztes vollständiges Orthonormalsystem von V. Ferner sei $x \in V$ ein beliebiger Vektor und $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$. Da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{7}$$

Für die Koordinaten ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ des Vektors x in bezug auf die Orthonormalbasis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ergibt sich

$$\xi_i = (x, x_i). \tag{8}$$

Es ist nämlich

$$(x, x_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j, x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (x_j, x_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \delta_{ji} = \xi_i.$$

Setzen wir (8) in (7) ein, so erhalten wir

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)^2. \tag{7'}$$

Für das Orthonormalsystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ gilt dann offenbar die Ungleichung

$$(x, x) \geqq \sum_{i=1}^{m} (x, x_i)^2, \tag{9}$$

die man *Besselsche Ungleichung* nennt. Die Gleichung (7') wird *Parsevalsche Gleichung* genannt.

IV. *Ist $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Orthonormalsystem des euklidischen Vektorraumes V und $x \in V$ ein beliebiger Vektor, so gilt die Besselsche Ungleichung*

$$(x, x) \geqq \sum_{i=1}^{m} (x, x_i)^2. \tag{9}$$

Das Orthonormalsystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ist dann und nur dann vollständig, wenn die Parsevalsche Gleichung gilt.

Ist das Orthonormalsystem $\{x_1, \ldots, x_m\}$ nicht vollständig, so gibt es wenigstens einen zu den Vektoren $x_1, \ldots, x_m$ orthogonalen, vom Nullvektor verschiedenen Vektor $x \in V$. Für diesen Vektor gilt $(x, x) \neq 0$ und $(x, x_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, m$, d. h., für diesen Vektor ist die Parsevalsche Gleichung nicht erfüllt.

5. ISOMETRIEN; DIE STRUKTUR n-DIMENSIONALER EUKLIDISCHER VEKTORRÄUME

Es seien V und V' zwei n-dimensionale euklidische Vektorräume. Das Skalarprodukt der Vektoren $x', y' \in V'$ bezeichnen wir mit (x', y'); es sei $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\mathfrak{B}'_0 = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ eine Orthonormalbasis von V'. Ist $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ ein Vektor aus V, so definieren wir eine Abbildung I von V in V' durch

$$Ix = \xi_1 x'_1 + \cdots + \xi_n x'_n.$$

Da $Ix_i = x'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist, bildet I eine Basis von V auf eine Basis von V' ab und ist folglich ein Isomorphismus des linearen Vektorraumes V auf den linearen Vektorraum V'. Überdies gilt für je zwei Vektoren $x, y \in V$

$$(Ix, Iy) = (x, y). \tag{10}$$

Ist $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$, so folgt aus der Definition der Abbildung I die Gleichung $\xi_i = (x, x_i) = (Ix, x'_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Für $y = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_n x_n$ ergibt sich entsprechend $\eta_i = (y, x_i) = (Iy, x'_i)$, und aus der Gleichung $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \eta_i$ folgt als Verallgemeinerung der Parsevalschen Gleichung

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \cdot (y, x_i). \tag{11}$$

Berechnen wir nun (Ix, Iy), so erhalten wir

$$(Ix, Iy) = \sum_{i=1}^{n} (Ix, x'_i) \cdot (Iy, x'_i) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \cdot (y, x_i) = (x, y),$$

und die Gleichung (10) ist bewiesen.

Eine lineare Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ heißt *isometrisch*, wenn für je zwei Vektoren $x, y \in V$

$$(Ax, Ay) = (x, y) \tag{10}$$

gilt. Ein *isometrischer Isomorphismus* heißt eine *Isometrie*.

Wir haben bewiesen: *Die durch $Ix = \xi_1 x'_1 + \cdots + \xi_n x'_n$ definierte Abbildung von V auf V' ist eine Isometrie.*

Es gilt allgemein:

V. *Jede isometrische lineare Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V in einen n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V' ist eine Isometrie.*

Es sei $A \in \mathscr{A}(V, V')$ eine isometrische lineare Abbildung und $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt $(Ax_i, Ax_j) = (x_i, x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet, und $A\mathfrak{B}_0 = \{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ ist eine Orthonormalbasis von V'. Folglich ist A ein Isomorphismus.

Ist A ein isometrischer Isomorphismus von V auf V', so ist A^{-1} ein Isomorphismus von V' auf V, und aus $(Ax, Ay) = (x, y)$ folgt

$$(x', y') = (A(A^{-1}x'), A(A^{-1}y')) = (A^{-1}x', A^{-1}y').$$

Die Abbildung A^{-1} ist eine Isometrie von V' auf V.

Zwei euklidische Vektorräume V und V', zwischen denen eine Isometrie $A \in \mathscr{A}(V, V')$ existiert, heißen *isometrisch isomorph*.

Wir haben bewiesen:

VI. *Zwei n-dimensionale euklidische Vektorräume sind isometrisch isomorph.*

Dieser Satz berechtigt uns, von *dem* (bis auf Isometrie eindeutig bestimmten) n-dimensionalen euklidischen Vektorraum zu sprechen. Damit ist auch die Überschrift zu diesem Paragraphen gerechtfertigt.

6. AUFGABEN

1. Sind $\check{\mathscr{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathscr{A}}_n$ die n-dimensionalen Vektorräume der Zeilen- bzw. Spaltenmatrizen und zeichnen wir die durch

$$\check{q}_0(\check{x}) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2, \quad \hat{q}_0(\hat{x}) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

für

$$\check{x} = \|\xi_1, \ldots, \xi_n\| \in \check{\mathscr{A}}_n \quad \text{bzw.} \quad \hat{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{Vmatrix} \in \hat{\mathscr{A}}_n$$

definierten quadratischen Formen auf $\check{\mathscr{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathscr{A}}_n$ aus, so werden $\check{\mathscr{A}}_n$ und $\hat{\mathscr{A}}_n$ n-dimensionale euklidische Vektorräume. Wie lauten die Formeln zur Berechnung des Skalarproduktes zweier Zeilen- bzw. Spaltenmatrizen? Wie läßt sich die Norm einer Zeilen- bzw. Spaltenmatrix und wie der Winkel zwischen zwei Zeilen- bzw. Spaltenmatrizen berechnen? Man bestimme zwei verschiedene Orthonormalbasen in $\check{\mathscr{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathscr{A}}_n$. Die in § 9, Nr. 5, 4⁰ und 5⁰ erklärten Abbildungen $\check{\Phi}$ und $\hat{\Phi}$ sind Isometrien von $\check{\mathscr{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathscr{A}}_n$ auf R^n.

2. Man überlege sich, daß analog dem Vorbild des Vektorraumes $\mathfrak{V}^{(2)}$ der Translationen der Ebene auch der Vektorraum $\mathfrak{V}^{(3)}$ der Translationen des Raumes ein euklidischer Vektorraum wird.

3.* Es sei P_n der n-dimensionale Vektorraum der Polynome $p(t)$ in einer Unbestimmten t. Durch

$$q_0(p) = \int_{-1}^{1} p^2(t)\, dt$$

wird auf P_n eine positiv definite quadratische Form q_0 definiert. Der Vektorraum P_n ist ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Wendet man auf die Basis $1, t, \ldots, t^{n-1}$ von P_n das Orthogonalisierungsverfahren an, so erhält man die Polynome

$$p_\nu(t) = \sqrt{\nu + \frac{1}{2}}\, P_\nu(t) \quad (\nu = 0, \ldots, n-1),$$

und die Polynome $P_\nu(t)$ sind die *Legendreschen Polynome*:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$$

$$(\nu + 1)\, P_{\nu+1}(t) = (2\nu + 1)\, t P_\nu(t) - \nu P_{\nu-1}(t) \quad (\nu = 1, \ldots, n-2).$$

4. Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen steht in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung das Gleichheitszeichen?

5. Man überlege sich, daß die Parsevalsche Gleichung eine Verallgemeinerung des Satzes von PYTHAGORAS ist. Diese Gleichung heißt daher auch der *n-dimensionale Satz des* PYTHAGORAS.

6. Sind V und V' n-dimensionale euklidische Vektorräume, so ist eine lineare Abbildung $A \in \mathscr{A}(V, V')$ dann und nur dann eine Isometrie, wenn A eine Orthonormalbasis von V in eine Orthonormalbasis von V' überführt.

7.* Sind V und V' n-dimensionale euklidische Vektorräume und $I_1, I_2 \in \mathscr{A}(V, V')$ Isometrien von V auf V', so sind $A = I_2^{-1} I_1$ bzw. $A' = I_2 I_1^{-1}$ isometrische lineare Abbildungen von V bzw. V' auf sich.

8.* Die isometrische Isomorphie ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation in der Klasse der euklidischen Vektorräume.

§ 17. DIE GRAMSCHE DETERMINANTE

1. EINLEITUNG

In einem euklidischen Vektorraum kann man jeder endlichen Menge von Vektoren eine symmetrische Matrix zuordnen, die wir die Gramsche Matrix dieser Vektoren nennen. Betrachtet man die Determinante als Funktion auf den Gramschen Matrizen, so spricht man von der Gramschen Determinante. Die Gramsche Determinante gestattet eine Reihe von Aussagen über die gegebene Menge von Vektoren. Sie ist ein bedeutendes Hilfsmittel für die analytische Beschreibung der Verhältnisse in euklidischen Vektorräumen. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Orthogonalprojektion eines Vektors auf einen gegebenen Teilraum berechnen und das Volumen eines von endlich vielen Vektoren bestimmten Parallelepipeds definieren. Am Schluß des Paragraphen wird eine für die Fehlerrechnung wichtige Anwendung der vorhergehenden Überlegungen, die sogenannte „Methode der kleinsten Quadrate" behandelt.

2. GRAMSCHE MATRIZEN UND DIE GRAMSCHE DETERMINANTE

Es sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\{z_1, \dots, z_m\}$ eine Menge von m Vektoren aus V. Die Skalarprodukte $(z_{i'}, z_i)$ $(i', i = 1, \dots, m)$ dieser Vektoren vereinigen wir zu einer m-reihigen quadratischen Matrix

$$\Gamma(z_1, \dots, z_m) = \left\| \begin{matrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) & \dots & (z_1, z_m) \\ (z_2, z_1) & (z_2, z_2) & \dots & (z_2, z_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z_m, z_1) & (z_m, z_2) & \dots & (z_m, z_m) \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

die wir die *Gramsche Matrix* der Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ nennen. Aus der Symmetrie des Skalarproduktes $(z_{i'}, z_i) = (z_i, z_{i'})$ $(i', i = 1, \ldots, m)$ folgt die Symmetrie der Gramschen Matrix:

$$\Gamma(z_1, \ldots, z_m)^{\mathsf{T}} = \Gamma(z_1, \ldots, z_m).$$

Betrachten wir die Determinante als Funktion auf den Gramschen Matrizen, so sprechen wir von der *Gramschen Determinante*

$$G(z_1, \ldots, z_m) \underset{\text{Def.}}{=} \det_m |\Gamma(z_1, \ldots, z_m)|. \tag{2}$$

Schreiben wir die Gleichung (2) in ihrer ausführlichen Form

$$G(z_1, \ldots, z_m) = \begin{vmatrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) & \ldots & (z_1, z_m) \\ (z_2, z_1) & (z_2, z_2) & \ldots & (z_2, z_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z_m, z_1) & (z_m, z_2) & \ldots & (z_m, z_m) \end{vmatrix} \tag{2'}$$

und berücksichtigen die Eigenschaften des Skalarproduktes und der Determinante, so erhalten wir zwei Eigenschaften der Gramschen Determinante:

1. Ist π eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, m$, so gilt

$$G(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(m)}) = G(z_1, \ldots, z_m).$$

2. Ist $\alpha \in R$ und $1 \leqq i \leqq m$, so gilt

$$G(z_1, \ldots, z_{i-1}, \alpha z_i, z_{i+1}, \ldots, z_m) = \alpha^2 \cdot G(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_m).$$

Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Determinante. Wir stellen fest, daß *der Wert der Gramschen Determinante nur von den m Vektoren* $z_1, \ldots, z_m$, *nicht aber von deren Reihenfolge abhängt.*

Die zweite Aussage erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} (z_1, z_1) & \ldots (z_1, z_{i-1}) & (z_1, \alpha z_i) & (z_1, z_{i+1}) & \ldots (z_1, z_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_{i-1}, z_1) & \ldots (z_{i-1}, z_{i-1}) & (z_{i-1}, \alpha z_i) & (z_{i-1}, z_{i+1}) & \ldots (z_{i-1}, z_m) \\ (\alpha z_i, z_1) & \ldots (\alpha z_i, z_{i-1}) & (\alpha z_i, \alpha z_i) & (\alpha z_i, z_{i+1}) & \ldots (\alpha z_i, z_m) \\ (z_{i+1}, z_1) & \ldots (z_{i+1}, z_{i-1}) & (z_{i+1}, \alpha z_i) & (z_{i+1}, z_{i+1}) & \ldots (z_{i+1}, z_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_m, z_1) & \ldots (z_m, z_{i-1}) & (z_m, \alpha z_i) & (z_m, z_{i+1}) & \ldots (z_m, z_m) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (z_1, z_1) & \ldots (z_1, z_{i-1}) & \alpha \cdot (z_1, z_i) & (z_1, z_{i+1}) & \ldots (z_1, z_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_{i-1}, z_1) & \ldots (z_{i-1}, z_{i-1}) & \alpha \cdot (z_{i-1}, z_i) & (z_{i-1}, z_{i+1}) & \ldots (z_{i-1}, z_m) \\ \alpha \cdot (z_i, z_1) & \ldots \alpha \cdot (z_i, z_{i-1}) & \alpha^2 \cdot (z_i, z_i) & \alpha \cdot (z_i, z_{i+1}) & \ldots \alpha \cdot (z_i, z_m) \\ (z_{i+1}, z_1) & \ldots (z_{i+1}, z_{i-1}) & \alpha \cdot (z_{i+1}, z_i) & (z_{i+1}, z_{i+1}) & \ldots (z_{i+1}, z_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z_m, z_1) & \ldots (z_m, z_{i-1}) & \alpha \cdot (z_m, z_i) & (z_m, z_{i+1}) & \ldots (z_m, z_m) \end{vmatrix}.$$

Man sagt: *Die Gramsche Determinante ist als Funktion von* z_i $(i = 1, \ldots, m)$ *homogen vom Grade* 2.

Mit Hilfe der Gramschen Determinante erhalten wir ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit endlich vieler Vektoren eines euklidischen Vektorraumes.

I. *Die Vektoren* $z_1, \ldots, z_m$ *des euklidischen Vektorraumes sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn ihre Gramsche Determinante nicht verschwindet.*

Den Beweis führen wir indirekt. Es sei

$$G(z_1, \ldots, z_m) = 0.$$

Dann sind die Zeilen der Gramschen Matrix linear abhängig, und es gibt m reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, die nicht alle gleich Null sind, so daß für $i = 1, \ldots, m$

$$\alpha_1 \cdot (z_1, z_i) + \alpha_2 \cdot (z_2, z_i) + \cdots + \alpha_m \cdot (z_m, z_i) = 0$$

gilt. Diese Gleichungen können wir zusammenfassen:

$$(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m, z_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Multiplizieren wir die i-te Gleichung mit α_i $(i = 1, \ldots, m)$ und addieren die m erhaltenen Gleichungen, so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m, z_i) = 0$$

und hieraus

$$(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m, \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m) = 0.$$

Da das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst nur für den Nullvektor verschwindet, folgt aus der letzten Gleichung die Behauptung:

$$\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m = \boldsymbol{o}.$$

Man überzeugt sich mühelos, daß umgekehrt aus der linearen Abhängigkeit der Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ die lineare Abhängigkeit der Zeilen ihrer Gramschen Matrix folgt. Dann ist aber $G(z_1, \ldots, z_m) = 0$, und das Kriterium I ist bewiesen.

3. ORTHOGONALPROJEKTION UND LOT; BERECHNUNG VON ORTHOGONALPROJEKTION UND LOT

Wir betrachten einen euklidischen Teilraum W des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Es sei $z \in V$ ein beliebiger Vektor. Wir bezeichnen einen Vektor $z^{(p)} \in W$ als eine *Orthogonalprojektion* des Vektors z auf den Teilraum W, wenn es

einen Vektor $z^{(l)} \in V$ gibt, der zu allen Vektoren aus W orthogonal ist, so daß

$$z = z^{(p)} + z^{(l)}$$

gilt. Der Vektor $z^{(l)}$ heißt ein *Lot* von z auf den Teilraum W.

1°. Ist R^3 der dreidimensionale euklidische Vektorraum, W ein zweidimensionaler Teilraum, so läßt sich der Sachverhalt folgendermaßen veranschaulichen. Wir repräsentieren alle Vektoren von R^3 durch gerichtete Strecken, die in einem festen Punkt P angetragen sind. Dann liegen die Repräsentanten der Vektoren aus W in einer Ebene durch den Punkt P. Der Repräsentant $\overrightarrow{PQ}$ des Vektors $z^{(p)}$ gehört dieser Ebene an, und der Repräsentant $\overrightarrow{QR}$ des Vektors $z^{(l)}$ steht auf dieser Ebene senkrecht (vgl. Abb. 10).

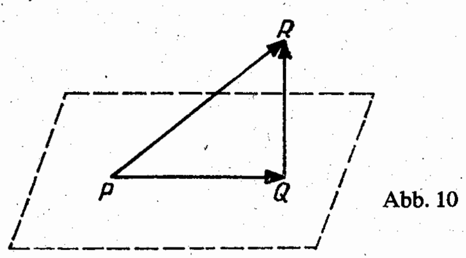


Abb. 10

Ist W ein m-dimensionaler Teilraum von V und bilden die Vektoren $x_1, \ldots, x_m$ eine Orthonormalbasis von W, so können wir diese Vektoren zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V ergänzen (vgl. § 16, Nr. 4, Satz III). Ist $z \in V$, so gilt

$$z = \zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_m x_m + \zeta_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \zeta_n x_n.$$

Der Vektor $z^{(p)} = \zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_m x_m$ gehört zum Teilraum W. Der Vektor $z^{(l)} = \zeta_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \zeta_n x_n$ ist zu den Basisvektoren $x_1, \ldots, x_m$ des Teilraumes W orthogonal. Es ist

$$(z^{(l)}, x_i) = \zeta_{m+1} \cdot (x_{m+1}, x_i) + \cdots + \zeta_n \cdot (x_n, x_i) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

und da $(x_j, x_i) = 0$ ist für $i \neq j$, folgt $(z^{(l)}, x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Wir beweisen den folgenden Hilfssatz:

Ist ein Vektor $x \in V$ zu allen Vektoren $y_1, \ldots, y_m$ einer beliebigen Basis des Teilraumes W (die keine Orthonormalbasis zu sein braucht) *orthogonal, so ist er zu allen Vektoren aus W orthogonal.*

Es sei $y = \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_m y_m$ ein beliebiger Vektor aus W. Dann ist

$$(x, y) = \eta_1 \cdot (x, y_1) + \cdots + \eta_m \cdot (x, y_m),$$

und wenn $(x, y_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist, folgt $(x, y) = 0$.

Nach diesem Hilfssatz ist der Vektor $z^{(l)}$ zu allen Vektoren aus W orthogonal, und nach der Definition der Vektoren $z^{(p)}$ und $z^{(l)}$ gilt

$$z = z^{(p)} + z^{(l)}.$$

Damit haben wir zu jedem Vektor $z \in V$ eine Orthogonalprojektion $z^{(p)}$ von z auf den Teilraum W, sowie ein Lot $z^{(l)}$ von z auf W angegeben.

Wir wollen eine Orthogonalprojektion und ein Lot noch in anderer Weise bestimmen und beweisen gleichzeitig den Satz

II. *Ist W ein m-dimensionaler Teilraum des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V, so sind Lot und Orthogonalprojektion eines Vektors $z \in V$ auf den Teilraum W eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz gibt uns das Recht, von *dem* Lot und *der* Orthogonalprojektion eines Vektors z auf einen Teilraum W zu sprechen.

Es sei $z \in V$ ein gegebener Vektor, $z^{(p)}$ und $z^{(l)}$ seien eine Orthogonalprojektion und ein Lot von z auf den Teilraum W. Dann gelten die Beziehungen

$$z = z^{(p)} + z^{(l)}, \quad z^{(p)} \in W, \quad (z^{(l)}, y) = 0 \quad \text{für alle} \quad y \in W.$$

Ist $\{y_1, \ldots, y_m\}$ eine beliebige Basis von W, so können wir $z^{(p)}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben: $z^{(p)} = \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_m y_m$. Es ist $(y_i, z^{(l)}) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, und da $z^{(l)} = z - z^{(p)}$ ist, gilt

$$(y_i, z - z^{(p)}) = (y_i, z) - (y_i, z^{(p)}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Wir haben m Gleichungen erhalten, die sich in der Form

$$(y_i, z^{(p)}) = (y_i, z) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

schreiben lassen. Setzen wir für $z^{(p)}$ seine Darstellung als Linearkombination der Vektoren $y_1, \ldots, y_m$ ein, so erhalten wir m lineare Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (y_1, y_1) \cdot \xi_1 + (y_1, y_2) \cdot \xi_2 + \cdots + (y_1, y_m) \cdot \xi_m = (y_1, z), \\ (y_2, y_1) \cdot \xi_1 + (y_2, y_2) \cdot \xi_2 + \cdots + (y_2, y_m) \cdot \xi_m = (y_2, z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_m, y_1) \cdot \xi_1 + (y_m, y_2) \cdot \xi_2 + \cdots + (y_m, y_m) \cdot \xi_m = (y_m, z) \end{array}\right\} \tag{3}$$

und stellen fest: *Die Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_m$ einer Orthogonalprojektion $z^{(p)}$ von z auf W in bezug auf die beliebig gewählte Basis $y_1, \ldots, y_m$ von W sind Lösungen eines linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix die Gramsche Matrix $\Gamma(y_1, \ldots, y_m)$ der Basisvektoren ist.* Die Vektoren $y_1, \ldots, y_m$ sind als Basisvektoren linear unabhängig, und nach Satz I ist $\Gamma(y_1, \ldots, y_m)$ eine reguläre Matrix. Das lineare Gleichungssystem (3) besitzt also *genau* eine Lösung. Damit ist der Vektor $z^{(p)}$ und durch die Gleichung $z^{(l)} = z - z^{(p)}$ auch der Vektor $z^{(l)}$ eindeutig bestimmt.

Das lineare Gleichungssystem (3) gibt uns gleichzeitig die Möglichkeit, die Vektoren $z^{(p)}$ und $z^{(l)}$ zu berechnen. Nach der Cramerschen Regel ist

$$\xi_i = \frac{G_i}{G} \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

wenn $G = G(y_1, \ldots, y_m)$ den Wert der Gramschen Determinante für die Basisvektoren $y_1, \ldots, y_m$ von W bezeichnet und

$$G_i = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \ldots & (y_1, y_{i-1}) & (y_1, z) & (y_1, y_{i+1}) & \ldots & (y_1, y_m) \\ (y_2, y_1) & \ldots & (y_2, y_{i-1}) & (y_2, z) & (y_2, y_{i+1}) & \ldots & (y_2, y_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_m, y_1) & \ldots & (y_m, y_{i-1}) & (y_m, z) & (y_m, y_{i+1}) & \ldots & (y_m, y_m) \end{vmatrix} \tag{4'}$$

ist. Wir erhalten die Gleichungen

$$z^{(p)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{G_i}{G} y_i \quad \text{und} \quad z^{(l)} = z - \sum_{i=1}^{m} \frac{G_i}{G} y_i . \tag{5}$$

Ist z' ein Vektor aus V, für den $z - z' \in W$ ist, so sagen wir: *Der Vektor z' verbindet den Vektor z mit dem Teilraum W.* Das Lot $z^{(l)}$ von z auf den Teilraum W besitzt offenbar diese Eigenschaft (vgl. auch Abb. 10).

Es sei z' ein beliebiger Vektor, für den $z - z' = y \in W$ ist. Dann gilt $z' = z - y$; und aus

$$\begin{aligned}(z - y, z - y) &= (z^{(l)} + (z^{(p)} - y), z^{(l)} + (z^{(p)} - y)) \\ &= (z^{(l)}, z^{(l)}) + (z^{(p)} - y, z^{(p)} - y)\end{aligned}$$

folgt

$$|z'| \geqq |z^{(l)}| . \tag{6}$$

Die Ungleichung (6) bedeutet eine wichtige Charakterisierung des Lotes $z^{(l)}$ von z auf den Teilraum W:

Das Lot $z^{(l)}$ von z auf W ist der kürzeste Vektor, der den Vektor z mit dem Teilraum W verbindet.

Wir berechnen die Länge des Lotes mit Hilfe der Gramschen Determinante. Zunächst ist $|z^{(l)}|^2 = (z^{(l)}, z^{(l)}) = (z^{(l)}, z - z^{(p)}) = (z^{(l)}, z)$. Benutzen wir die in (5) für $z^{(l)}$ angegebene Gleichung, so gilt

$$|z^{(l)}|^2 = (z, z) - \sum_{i=1}^{m} \frac{G_i}{G} \cdot (y_i, z)$$

oder

$$|z^{(l)}|^2 \cdot G = (z, z) \cdot G - \sum_{i=1}^{m} (y_i, z) \cdot G_i . \tag{7}$$

Entwickeln wir die Gramsche Determinante

$$G(z, y_1, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} (z, z) & (z, y_1) & \ldots & (z, y_m) \\ (y_1, z) & (y_1, y_1) & \ldots & (y_1, y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_m, z) & (y_m, y_1) & \ldots & (y_m, y_m) \end{vmatrix}$$

nach der ersten Spalte, so erhalten wir

$$G(z, y_1, \ldots, y_m) = (z, z) \cdot G + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \cdot (y_i, z) \cdot G^{\langle i+1,1\rangle}(z, y_1, \ldots, y_m).$$

Dabei ist

$$G^{\langle i+1,1\rangle}(z, y_1, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} (z, y_1) & (z, y_2) & \ldots & (z, y_m) \\ (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \ldots & (y_1, y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_{i-1}, y_1) & (y_{i-1}, y_2) & \ldots & (y_{i-1}, y_m) \\ (y_{i+1}, y_1) & (y_{i+1}, y_2) & \ldots & (y_{i+1}, y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_m, y_1) & (y_m, y_2) & \ldots & (y_m, y_m) \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot G_i.$$

Es ergibt sich

$$G(z, y_1, \ldots, y_m) = (z, z) \cdot G - \sum_{i=1}^{m} (y_i, z) \cdot G_i,$$

und durch Vergleich mit (7) folgt

$$|z^{(l)}|^2 \cdot G(y_1, \ldots, y_m) = G(z, y_1, \ldots, y_m). \tag{8}$$

Dividiert man die Gleichung (8) durch $G(y_1, \ldots, y_m)$ und zieht auf beiden Seiten die positive Wurzel, so ergibt sich für die Länge des Lotes $z^{(l)}$ von z auf den Teilraum $W = L(\{y_1, \ldots, y_m\})$

$$|z^{(l)}| = +\sqrt{\frac{G(z, y_1, \ldots, y_m)}{G(y_1, \ldots, y_m)}}. \tag{9}$$

Aus der Gleichung (8) erhalten wir überdies eine wichtige Folgerung über den Wertevorrat der Gramschen Determinante:

III. *Die Gramsche Determinante ist keiner negativen Werte fähig. Sind $z_1, \ldots, z_m$ beliebige Vektoren aus V, so ist*

$$G(z_1, \ldots, z_m) \geqq 0.$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion. Es ist

$$G(z_1) = (z_1, z_1) = |z_1|^2 \geqq 0.$$

Nach Induktionsannahme sei $G(z_1, \ldots, z_{m-1}) \geqq 0$. Aus (8) folgt

$$G(z_1, \ldots, z_m) = |z_m^{(l)}|^2 \cdot G(z_1, \ldots, z_{m-1}) \geqq 0,$$

wenn man beachtet, daß der Wert der Gramschen Determinante von der Reihenfolge der Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ unabhängig ist.

4.* DAS VOLUMEN EINES PARALLELEPIPEDS

Die Gramsche Determinante ordnet nach Satz III jeder Menge $z_1, \ldots, z_m$ von Vektoren aus V eine nichtnegative reelle Zahl zu. Nach der Eigenschaft 2 der Gramschen Determinante wird diese Zahl mit α^2 multipliziert, wenn einer der Vektoren z_i mit α multipliziert wird. Bezeichnet

$$F(z_1, \ldots, z_m) \underset{\text{Def.}}{=} {}_+\sqrt{G(z_1, \ldots, z_m)}$$

die positive Wurzel aus der Gramschen Determinante, so gilt

$$F(z_1, \ldots, z_{i-1}, \alpha z_i, z_{i+1}, \ldots, z_m) = |\alpha| \cdot F(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_m).$$

Es ist üblich, den Wert der Funktion $F(z_1, \ldots, z_m)$ das *Volumen des von den Vektoren* $z_1, \ldots, z_m$ *bestimmten Parallelepipeds* zu nennen. Dies wird durch folgende Überlegungen nahegelegt:

Ist $m = 1$ und ist $z = z_1$ ein beliebiger Vektor aus V, so gilt

$$F(z) = {}_+\sqrt{G(z)} = {}_+\sqrt{(z, z)} = |z|.$$

$F(z)$ beschreibt in diesem Fall die Länge des Vektors z. Ist $m = 2$, so gilt

$$G(z_1, z_2) = |z_2^{(l)}|^2 \cdot G(z_1)$$

oder

$$F(z_1, z_2) = |z_2^{(l)}| \cdot |z_1|.$$

2°. Repräsentieren wir die Vektoren z_1, z_2 durch in einem Punkt P angetragene gerichtete Strecken $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{PP_2}$ und betrachten wir das von ihnen bestimmte Parallelogramm, so wird der Vektor $z_2^{(l)}$ durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{QP_2}$ repräsentiert, und $F(z_1, z_2)$ ist der Flächeninhalt dieses Parallelogramms (Abb. 11).

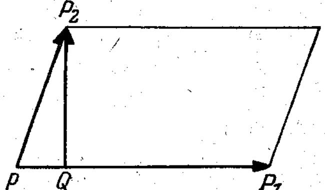


Abb. 11

Ist $m = 3$, so gilt

$$G(z_1, z_2, z_3) = |z_3^{(l)}|^2 \cdot G(z_1, z_2)$$

oder

$$F(z_1, z_2, z_3) = |z_3^{(l)}| \cdot F(z_1, z_2).$$

3°. Werden die Vektoren z_1, z_2, z_3 wiederum durch in einem Punkt angetragene gerichtete Strecken repräsentiert und betrachtet man das durch diese Strecken bestimmte Parallelepiped, so ist

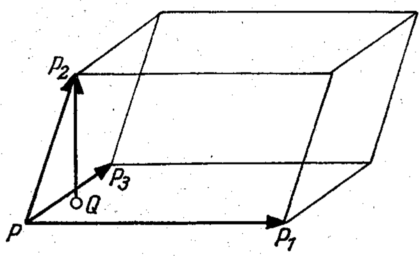


Abb. 12

$F(z_1, z_2)$ der Flächeninhalt der Grundfläche, $|z_3^{(l)}|$ die Höhe des Parallelepipeds, und $F(z_1, z_2, z_3)$ ist sein Volumen (Abb. 12).

Nennen wir $F(z_1, \ldots, z_m)$ das Volumen des von den Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ bestimmten Parallelepipeds, so erhalten wir aus der Gleichung (9) eine Verallgemeinerung der elementargeometrischen Formel

Volumen eines Parallelepipeds = Grundfläche · Höhe

in der Gestalt

$$F(z_1, \ldots, z_m) = F(z_1, \ldots, z_{m-1}) \cdot |z_m^{(l)}|.$$

Dabei ist $F(z_1, \ldots, z_{m-1})$ das Volumen der von den Vektoren $z_1, \ldots, z_{m-1}$ bestimmten „Grundfläche", und $|z_m^{(l)}|$ ist die Länge des Lotes von z_m auf den von den Vektoren $z_1, \ldots, z_{m-1}$ aufgespannten Teilraum, d. h. die „Höhe" des Parallelepipeds.

Wenn wir in dem euklidischen Vektorraum V eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ auszeichnen, können wir das Volumen $F(z_1, \ldots, z_m)$ des von den Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ bestimmten Parallelepipeds noch in anderer Weise ausdrücken. Es sei $z_i = \xi_{1i}x_1 + \cdots + \xi_{ni}x_n$ $(i = 1, \ldots, m)$. Dann ist

$$(z_{i'}, z_i) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji'} \cdot \xi_{ji} \quad (i', i = 1, \ldots, m).$$

Ist $C = \|\xi_{ji}\|_{n,m}$ die durch die Koordinaten der Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ bezüglich $\mathfrak{B}_0$ gegebene Matrix, so erhalten wir für die Gramsche Matrix $\Gamma(z_1, \ldots, z_m)$ die Gleichung

$$\Gamma(z_1, \ldots, z_m) = C^{\mathsf{T}} \cdot C.$$

Für die Gramsche Determinante $G(z_1, \ldots, z_m)$ bzw. für das Volumen $F(z_1, \ldots, z_m)$ folgt

$$G(z_1, \ldots, z_m) = \det_m |C^{\mathsf{T}} \cdot C|, \quad F(z_1, \ldots, z_m) = {}_{+}\sqrt{\det_m |C^{\mathsf{T}} \cdot C|}.$$

Ist $m = n$, so ist C eine quadratische Matrix und

$$\det_n |C^{\mathsf{T}} \cdot C| = \det_n |C^{\mathsf{T}}| \cdot \det_n |C| = \det_n |C|^2.$$

Das Volumen eines von n Vektoren $z_1, \ldots, z_n$ in einem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V bestimmten Parallelepipeds ist gleich dem Betrag der Determinante für die Koordinatenmatrix:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \big|\det_n|\xi_{i'i}|\big|.$$

Damit haben wir eine geometrische Interpretation für den Absolutbetrag der Determinante gewonnen. *

5. DIE METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

In Physik und Technik wird man oft vor die Aufgabe gestellt, eine Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ von m unabhängigen Veränderlichen durch das Messen der Funktionswerte y für gewisse Werte der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ zu bestimmen. Der einfachste Fall dieses Problems, auf den man das allgemeine Problem häufig in erster Näherung reduzieren kann, liegt dann vor, wenn man weiß, daß f eine lineare Funktion der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ ist. Man nimmt an, daß

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2 + \cdots + \xi_m \cdot x_m \tag{10}$$

ist, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ reelle Zahlen sind, die aus den vorgenommenen Messungen bestimmt werden müssen.

Wir bezeichnen die Anzahl der vorgenommenen Messungen mit n. Bei der j-ten Messung $(j = 1, \ldots, n)$ haben wir für die Werte $x_1 = \alpha_{j1}$, $x_2 = \alpha_{j2}$, $\ldots$, $x_m = \alpha_{jm}$

der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ den Funktionswert $y_j = \beta_j$ gemessen. Da wir angenommen haben, daß die gesuchte Funktion f die Form (10) besitzt, gilt

$$\beta_j = \xi_1 \cdot \alpha_{j1} + \xi_2 \cdot \alpha_{j2} + \cdots + \xi_m \cdot \alpha_{jm} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Durch die vorgenommenen Messungen erhalten wir also ein lineares Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i \doteq \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

von n Gleichungen für die m gesuchten Koeffizienten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, die die gesuchte Funktion f nach (10) bestimmen. Im allgemeinen wird die Anzahl n der Gleichungen wesentlich größer sein (und sogar sein müssen!) als die Anzahl m der gesuchten Koeffizienten, und durch die unvermeidbaren Meßungenauigkeiten wird das lineare Gleichungssystem (11) keine Lösung besitzen. Man muß also Werte $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ so zu bestimmen suchen, daß die Ausdrücke $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}$ von den β_j möglichst wenig abweichen. Was bedeutet „möglichst wenig" abweichen? Die Differenz $\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}$ soll nicht nur für ein j oder für einige j möglichst klein werden, sondern für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ gleichzeitig. Infolgedessen ist es naheliegend, über die einzelnen „Fehler" $\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}$ zu summieren. Allerdings können sich bei dieser Summation gewisse (und eventuell sehr große) Fehler gegenseitig wegheben. Summiert man über die Quadrate $\left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}\right)^2$ der Fehler, so ist diese Möglichkeit ausgeschlossen, und die Größe

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}\right)^2, \tag{12}$$

die der *mittlere Fehler* genannt wird, betrachtet man nach GAUSS als ein Maß für die Abweichung der Funktion

$$f^{(0)}(x_1, \ldots, x_m) = \xi_1^{(0)} \cdot x_1 + \xi_2^{(0)} \cdot x_2 + \cdots + \xi_m^{(0)} \cdot x_m$$

von der gesuchten Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$.

Das Problem besteht also darin, zu gegebenen Werten α_{ji} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ und gemessenen Funktionswerten β_j $(j = 1, \ldots, n)$ reelle Zahlen $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)}\right)^2$$

minimal wird.

Es sei R^n der euklidische Vektorraum der n-tupel $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ reeller Zahlen mit der durch $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$ definierten positiv definiten quadratischen Form. Wir betrachten die Vektoren

$$\boldsymbol{x}_i = (\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni}) \in R^n \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und

$$\boldsymbol{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^n.$$

Das lineare Gleichungssystem (11) läßt sich nun als Vektorgleichung

$$\xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \xi_m \boldsymbol{x}_m \doteq \boldsymbol{y} \tag{13}$$

schreiben.

Wir können dabei annehmen, daß die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ linear unabhängig sind. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so läßt es sich durch weitere Messungen und eine neue Numerierung der Messungen stets erreichen, es sei denn, die Funktion f hängt in Wahrheit von weniger als m unabhängigen Veränderlichen ab. Diesen Fall wollen wir aus der Betrachtung ausschließen. Die linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ erzeugen einen m-dimensionalen Teilraum $W = L(\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\})$ von R^n. Da das lineare Gleichungssystem (11), wie oben bemerkt, im allgemeinen keine Lösung besitzt, ist auch die Gleichung (13) im allgemeinen nicht lösbar, und der Vektor $\boldsymbol{y}$ liegt nicht in dem Teilraum W. Sind $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}$ reelle Zahlen und betrachten wir den Ausdruck

$$\Delta^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(1)} \right)^2,$$

so ist $\Delta^{(1)}$ offenbar das Quadrat der Länge des Vektors

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(1)} \boldsymbol{x}_i.$$

Dabei ist $\boldsymbol{z}_1$ ein Vektor, der den Vektor $\boldsymbol{y}$ mit dem Teilraum W verbindet. Das Problem, die Zahlen $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ so zu bestimmen, daß Δ minimal wird, ist damit der Frage nach dem kürzesten Vektor $\boldsymbol{z}_0$, der $\boldsymbol{y}$ mit dem Teilraum W verbindet, gleichwertig. In Nr. 3 haben wir festgestellt, daß das Lot von $\boldsymbol{y}$ auf den Teilraum W der kürzeste Vektor ist, der $\boldsymbol{y}$ mit W verbindet. Wählen wir also $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ so, daß

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}^{(l)} \tag{14}$$

ist, so ist

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot \xi_i^{(0)} \right)^2$$

minimal. Aus der Gleichung (14) folgt

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)} \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{y}^{(l)}.$$

und es ist

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)} \boldsymbol{x}_i$$

die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{y}$ auf W. Für die gesuchten $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ ergibt sich aus den Gleichungen (4) und (4′) der Nr. 3

$$\xi_i^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) \ldots (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{i-1}) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{i+1}) \ldots (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_m) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \ldots (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{i-1}) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{i+1}) \ldots (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_m) \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_1) \ldots (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{i-1}) & (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{i+1}) \ldots (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_m) \end{vmatrix}}{G(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)} \tag{15}$$

$$(i = 1, \ldots, m).$$

Die Gleichungen (15) beschreiben die Lösungen des betrachteten Problems. Aus den gegebenen α_{ji} und β_j $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ haben wir diejenigen Zahlen $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ berechnet, für die der mittlere Fehler Δ minimal ist.

Das geschilderte Verfahren zur Bestimmung einer Funktion $f^{(0)}(x_1, \ldots, x_m)$ aus gegebenen Meßwerten heißt die *Methode der kleinsten Quadrate.*

4⁰. Als Beispiel betrachten wir den Fall einer Funktion einer Veränderlichen:

$$y = f(x) = \xi \cdot x.$$

Für $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sei $y = \beta_1, \ldots, \beta_n$ gemessen worden. Wir suchen einen Proportionalitätsfaktor $\xi^{(0)}$, so daß

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \xi^{(0)} \cdot \alpha_j)^2$$

minimal wird. Nach (15) ist

$$\xi^{(0)} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

mit $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Wir erhalten

$$\xi^{(0)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2}.$$

Dieses Ergebnis läßt sich in der Ebene wie folgt veranschaulichen. Sind $P_i = \{(\alpha_i, \beta_i)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ n gegebene Punkte der Ebene, so ist $y = \xi^{(0)} \cdot x$ die Gleichung derjenigen Geraden durch den Nullpunkt, die die gegebene Punktmenge am besten approximiert.

Bemerkung. In unseren Überlegungen haben wir lediglich davon Gebrauch gemacht, daß zwischen den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$, von denen die Funktion f abhängt, keine lineare Relation besteht. Daraus ließ sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in R^n$ folgern.

Man kann diese Bemerkung verwenden, um mit der gleichen Methode andere Approximationsprobleme zu behandeln, z. B. das folgende:

Gegeben seien die Meßwerte $\beta_1, \ldots, \beta_n$ für die folgenden Werte der Veränderlichen:

$$x_1 = \alpha_1^0, x_2 = \alpha_1^1, \ldots, x_m = \alpha_1^{m-1}; \ldots; x_1 = \alpha_n^0, x_2 = \alpha_n^1, \ldots, x_m = \alpha_n^{m-1}.$$

Dann sind die Vektoren

$$x_1 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0),\ x_2 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1),\ \ldots,\ x_m = (\alpha_1^{m-1}, \ldots, \alpha_n^{m-1})$$

bei geeigneter Wahl der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängig, und für die aus der Gleichung (15) bestimmten $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ ist

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j - \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)} \cdot \alpha_j^{i-1}\right)^2$$

minimal. Setzen wir $x_i = t^{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so ist

$$p(t) = \xi_1^{(0)} + \xi_2^{(0)} \cdot t + \cdots + \xi_m^{(0)} \cdot t^{m-1}$$

diejenige ganze rationale Funktion vom Grad $<m$, die die gesuchte Funktion $f(x_1, \ldots, x_m) = \psi(t)$ am besten approximiert.

6. AUFGABEN

1. Sind $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängige Vektoren im n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und ist $z_1^{(p)} = y_1$, $z_i^{(p)}$ $(i = 2, \ldots, m)$ das Lot von y_i auf $W_{i-1} = L(\{y_1, \ldots, y_{i-1}\})$, so bilden die Vektoren $x_i = \dfrac{z_i^{(p)}}{|z_i^{(p)}|}$ ein Orthonormalsystem von Vektoren aus V, und es gilt

$$L(\{x_1, \ldots, x_i\}) = W_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

2.* Man beweise die Ungleichung

$$G(z_1, \ldots, z_m) \leqq G(z_1) \cdots G(z_m). \tag{*}$$

(Hinweis: Man zeige $G(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m) \leqq G(z_1, \ldots, z_{m-1}) \cdot G(z_m)$ und schließe weiter durch vollständige Induktion.)

3.* In der Ungleichung (*) steht dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn die Vektoren $z_1, \ldots, z_m$ paarweise orthogonal sind.

4.* Aus der Ungleichung (*) folgere man die *Hadamardsche Ungleichung*

$$(\det_n |\xi_{i'i}|)^2 \leqq \sum_{i'=1}^{n} |\xi_{i'1}|^2 \cdots \sum_{i'=1}^{n} |\xi_{i'n}|^2$$

und bestimme ein Kriterium, wann in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen steht.

5.* Es sei W ein euklidischer Teilraum des euklidischen Vektorraumes V und $z_i^{(p)}$ die Orthogonalprojektion von $z_i \in V$ $(i = 1, \ldots, m)$ auf den Teilraum W. Durch vollständige Induktion beweise man die Ungleichung

$$G(z_1^{(p)}, \ldots, z_m^{(p)}) \leqq G(z_1, \ldots, z_m).$$

Wann steht in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen?

6.* Wie lassen sich die Ergebnisse der Aufgaben 2, 3 und 5 geometrisch interpretieren?

7. Es sei $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V und $z_i = \zeta_{1i}x_1 + \cdots + \zeta_{ni}x_n$ $(i = 1, \ldots, m)$. Man beweise

$$G(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n} \begin{vmatrix} \zeta_{i_11} & \zeta_{i_12} & \cdots & \zeta_{i_1m} \\ \zeta_{i_21} & \zeta_{i_22} & \cdots & \zeta_{i_2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_{i_m1} & \zeta_{i_m2} & \cdots & \zeta_{i_mm} \end{vmatrix}^2.$$

8. Man approximiere die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} +\sqrt{x^2+1} & \text{für} \quad x \geqq 0, \\ -\sqrt{x^2-1} & \text{für} \quad x \leqq -1 \end{cases}$$

durch eine lineare Funktion.

§ 18. LINEARE OPERATOREN IN EUKLIDISCHEN VEKTORRÄUMEN

1. EINLEITUNG

Für die Untersuchung euklidischer Vektorräume sind naturgemäß diejenigen linearen Operatoren von besonderer Bedeutung, die in irgendeinem Zusammenhang mit dem Skalarprodukt stehen. Es handelt sich dabei vor allem um lineare Operatoren, die das Skalarprodukt ungeändert lassen und folglich eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführen. Mit ihrer Hilfe läßt sich auch das Transformationsverhalten der Koordinaten beim Übergang von einer Orthonormalbasis zu einer anderen beschreiben. Dies geschieht ähnlich wie für den allgemeinen Fall des Übergangs von einer beliebigen Basis zu einer anderen ebenfalls beliebigen Basis.

Eine weitere Klasse wichtiger linearer Operatoren bilden die sogenannten symmetrischen Operatoren. Zwischen ihnen und den quadratischen Formen auf einem euklidischen Vektorraum besteht ein enger Zusammenhang, der im § 20 zur Klassifikation der quadratischen Formen verwandt wird. Schließlich erscheinen die Resultate des vorhergehenden Paragraphen in einem neuen Licht, wenn man den Begriff des Projektors einführt und die Orthogonalprojektion auf einen Teilraum durch Projektoren beschreibt.

2. BILINEARFORMEN UND LINEARE FUNKTIONALE IN EUKLIDISCHEN VEKTORRÄUMEN; DER ADJUNGIERTE OPERATOR; ORTHOGONALE, SYMMETRISCHE UND SCHIEFSYMMETRISCHE OPERATOREN; EIGENWERTE UND EIGENRÄUME ORTHOGONALER, SYMMETRISCHER UND SCHIEFSYMMETRISCHER OPERATOREN

Es sei $\mathscr{A}(V)$ die Menge der linearen Operatoren auf dem euklidischen Vektorraum V. Ist $A \in \mathscr{A}(V)$, so ist

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

eine Bilinearform auf dem euklidischen Vektorraum V, denn es gelten folgende Gleichungen:

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$
$$= f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}),$$

$$f(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A(\alpha\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\alpha A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2),$$

$$f(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \alpha \cdot (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Wir beweisen umgekehrt:

I. *Jede Bilinearform $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ auf einem euklidischen Vektorraum V ist mit Hilfe eines linearen Operators $A \in \mathscr{A}(V)$ in der Form* (1) *darstellbar.*

Wir betrachten $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ als Funktion von $\boldsymbol{y}$:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{y});$$

dann ist $\boldsymbol{z}^* \in V^*$ ein lineares Funktional auf dem euklidischen Vektorraum V. Es genügt zu zeigen:

II. *Ist $\boldsymbol{z}^*$ ein lineares Funktional auf einem euklidischen Vektorraum V, so gibt es ein $\boldsymbol{z} \in V$, so daß für alle $\boldsymbol{y} \in V$*

$$\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \tag{2}$$

gilt.

Hieraus folgt der Satz I, wenn wir $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ setzen und nachweisen, daß die so definierte Abbildung A von V in sich linear ist. Es ist $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, und folglich gilt

$$(A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$
$$= (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$

für jeden Vektor $\boldsymbol{y} \in V$. Also ist für jeden Vektor $\boldsymbol{y} \in V$

$$(A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) - A\boldsymbol{x}_1 - A\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = 0,$$

und daraus folgt $A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2$. Entsprechend gilt

$$(A(\alpha\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\alpha A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

oder $(A(\alpha\boldsymbol{x}) - \alpha A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ für jeden Vektor $\boldsymbol{y} \in V$. Dann ist aber $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x}$ und A ist ein linearer Operator auf dem Vektorraum V.

Wir beweisen den Satz II. Die Menge W derjenigen $\boldsymbol{x} \in V$, für die $\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{x}) = 0$ ist, bildet einen linearen Teilraum von V (vgl. etwa § 12, Nr. 3, Satz IV). Ist $W = V$, so ist $\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $\boldsymbol{x}$, und es gilt $\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x})$. Die Behauptung von Satz II ist also mit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$ erfüllt. Ist W ein echter Teilraum von V, so gibt es einen vom Nullvektor

verschiedenen Vektor $x_0 \in V$, der zu allen Vektoren des Teilraumes W orthogonal ist und nicht zu W gehört. Es ist also $z^*(x_0) \neq 0$, und für jedes $x \in V$ gilt

$$z^*(z^*(x)\, x_0 - z^*(x_0)\, x) = 0.$$

Für jeden Vektor $x \in V$ folgt aus dieser Gleichung $z^*(x)\, x_0 - z^*(x_0)\, x \in W$, und da x_0 zu allen Vektoren aus W orthogonal ist, erhalten wir

$$(x_0, z^*(x)\, x_0 - z^*(x_0)\, x) = z^*(x) \cdot (x_0, x_0) - (x_0, z^*(x_0)\, x) = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch (x_0, x_0) und berücksichtigen die Gleichung $(x_0, z^*(x_0)\, x) = (z^*(x_0)\, x_0, x)$, so erhalten wir

$$z^*(x) = \left(\frac{z^*(x_0)}{|x_0|^2}\, x_0, x\right),$$

und die Behauptung von Satz II ist für $z = \dfrac{z^*(x_0)}{|x_0|^2}\, x_0$ erfüllt.

Ist $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator auf dem Vektorraum V, so ist aber auch

$$f^*(x, y) = (x, Ay)$$

eine Bilinearform. Nach dem oben bewiesenen Satz I gibt es einen linearen Operator $A^* \in \mathscr{A}(V)$, so daß

$$f^*(x, y) = (A^*x, y)$$

ist. Der lineare Operator A^* wird durch die Gleichung

$$(A^*x, y) \underset{\text{Def.}}{=} (x, Ay) \quad (x, y \in V) \tag{3}$$

definiert und heißt der zu A *adjungierte lineare Operator.*

Da $(A^*x, y) = (y, A^*x)$ ist, gilt für je zwei Vektoren $x, y \in V$ die Gleichung $((A^*)^*\, y, x) = (y, A^*x)$ oder $(x, (A^*)^*\, y) = (x, Ay)$. Daraus folgt

$$(A^*)^* = A. \tag{4}$$

Der adjungierte Operator des adjungierten Operators stimmt mit dem ursprünglichen Operator überein.

Sind $A, B \in \mathscr{A}(V)$ zwei lineare Operatoren auf dem euklidischen Vektorraum V und betrachten wir ihr Produkt AB, so gilt für je zwei Vektoren $x, y \in V$ die Gleichungskette

$$((AB)^*\, x, y) = (x, ABy) = (A^*x, By) = (B^*A^*x, y),$$

und daraus folgt:

Der adjungierte Operator eines Produktes ist gleich dem Produkt der adjungierten Operatoren in umgekehrter Reihenfolge:

$$(AB)^* = B^*A^*. \tag{5}$$

Ein linearer Operator $U \in \mathscr{A}(V)$ heißt *isometrisch* oder *orthogonal,* wenn für je zwei Vektoren $x, y \in V$

$$(Ux, Uy) = (x, y) \tag{6}$$

gilt.

Wir beweisen den Satz

III. *Ein orthogonaler Operator U ist stets regulär, und sein inverser Operator U^{-1} ist ebenfalls orthogonal.*

Da V als euklidischer Vektorraum endlichdimensional ist, genügt es zu zeigen, daß jeder orthogonale Operator eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist (vgl. § 11, Nr. 3, Satz IV). Wir nehmen an, daß $Ux = Uy$ ist. Dann gilt

$$0 = (Ux - Uy, Ux - Uy) = (U(x - y), U(x - y)) = (x - y, x - y),$$

und daraus folgt $x - y = o$ oder $x = y$.

Der Operator U^{-1} existiert also, und es ist

$$(U^{-1}x, U^{-1}y) = (U(U^{-1}x), U(U^{-1}y)) = (x, y).$$

Damit ist der Satz III bewiesen.

Darüber hinaus gilt $(x, Uy) = (U^{-1}x, U^{-1}(Uy)) = (U^{-1}x, y)$, und folglich ist $U^{-1} = U^*$ oder $U^*U = UU^* = E$. Ist umgekehrt $U \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator, für den $U^*U = UU^* = E$ ist, so gilt

$$(x, y) = (Ex, y) = (U^*Ux, y) = (Ux, Uy),$$

und der Operator U ist orthogonal. Wir haben das folgende Kriterium bewiesen:

IV. *Ein regulärer Operator $U \in \mathscr{A}(V)$ ist dann und nur dann orthogonal, wenn sein adjungierter Operator mit dem inversen Operator übereinstimmt:*

$$U^* = U^{-1} \tag{7}$$

oder

$$U^*U = E = UU^*. \tag{8}$$

Sind U_1, U_2 zwei orthogonale Operatoren, so gilt für ihr Produkt

$$(U_1U_2)^* = U_2^*U_1^* = U_2^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_2)^{-1}.$$

Das Produkt zweier orthogonaler Operatoren ist wiederum ein orthogonaler Operator. Da der *Einsoperator E orthogonal* ist und das Produkt von drei orthogonalen Operatoren wie das Produkt von drei beliebigen Operatoren dem assoziativen Gesetz genügt, erhalten wir den Satz

V. *Die orthogonalen Operatoren eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V bilden eine Gruppe $\mathfrak{D}_n$.*

Die Gruppe $\mathfrak{D}_n$ heißt die *allgemeine n-dimensionale Drehgruppe.*

Ein linearer Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch*, wenn für je zwei Vektoren $x, y \in V$

$$(Ax, y) = (x, Ay) \tag{9}$$

gilt.

Die Gleichung (9) ist der folgenden Operatorgleichung äquivalent:

$$A^* = A. \tag{10}$$

Ein linearer Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn für je zwei Vektoren $x, y \in V$

$$(Ax, y) = -(x, Ay). \tag{11}$$

gilt.

Die Gleichung (11) ist der folgenden Operatorgleichung äquivalent:

$$A^* = -A. \tag{12}$$

Die Bedeutung der symmetrischen und der schiefsymmetrischen Operatoren ergibt sich unter anderem daraus, daß *sich jeder lineare Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ als Summe eines symmetrischen und eines schiefsymmetrischen Operators darstellen läßt.* Ist $A \in \mathscr{A}(V)$ ein beliebiger linearer Operator, so bilden wir die Operatoren

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{und} \quad A_{-s} = \frac{1}{2}(A - A^*), \tag{13}$$

wobei A^* der zu A adjungierte Operator ist. Sind x und y beliebige Vektoren aus V, so gilt

$$\begin{aligned}(x, A_s y) &= \left(x, \frac{1}{2}(A + A^*)y\right) = \frac{1}{2}\cdot(x, Ay) + \frac{1}{2}\cdot(x, A^*y)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(A^*x, y) + \frac{1}{2}\cdot(Ax, y) = \left(\frac{1}{2}(A^* + A)\,x, y\right) = (A_s x, y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x, A_{-s} y) &= \left(x, \frac{1}{2}(A - A^*)y\right) = \frac{1}{2}\cdot(x, Ay) - \frac{1}{2}\cdot(x, A^*y)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(A^*x, y) - \frac{1}{2}\cdot(Ax, y) = -\left(\frac{1}{2}\,(A - A^*)\,x, y\right) = -(A_{-s}x, y).\end{aligned}$$

Die Operatoren A_s bzw. A_{-s} sind also symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, und aus den Definitionsgleichungen (13) folgt unmittelbar

$$A = A_s + A_{-s}. \tag{14}$$

Man nennt A_s bzw. A_{-s} die *symmetrische Komponente* oder den *symmetrischen Anteil* bzw. die *schiefsymmetrische Komponente* oder den *schiefsymmetrischen Anteil* des Operators A.

Wir beweisen noch einige einfache Sätze über die Eigenwerte und Eigenräume orthogonaler, symmetrischer und schiefsymmetrischer Operatoren, die im § 19 bei der Ableitung der Normalform für die genannten Operatoren von Bedeutung sind.

Es sei $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator, λ_A bezeichne einen Eigenwert von A und $W(\lambda_A)$ den zugehörigen Eigenraum. Zwei Teilräume W_1 und W_2 von V heißen *zueinander orthogonal*, wenn je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ zueinander orthogonal sind: $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$. Es gilt der folgende Satz

VI. *Sind λ_A, λ_{A*} verschiedene Eigenwerte des linearen Operators $A \in \mathscr{A}(V)$ und seines adjungierten Operators A^*, so sind die Eigenräume $W(\lambda_A)$ und $W(\lambda_{A*})$ zueinander orthogonal.*

Für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}_1 \in W(\lambda_A)$, $\boldsymbol{x}_2 \in W(\lambda_{A*})$ gilt $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_A \boldsymbol{x}_1$ und $A^*\boldsymbol{x}_2 = \lambda_{A*}\boldsymbol{x}_2$. Damit ist

$$\begin{aligned}\lambda_A \cdot (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_A \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, A^*\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_{A*}\boldsymbol{x}_2) \\ = \lambda_{A*} \cdot (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

oder

$$(\lambda_A - \lambda_{A*}) \cdot (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Da wir $\lambda_A \neq \lambda_{A*}$ vorausgesetzt hatten, folgt aus der letzten Gleichung $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$, und das ist die Behauptung.

Als wichtige Folgerung aus dem Satz VI ergibt sich für einen symmetrischen Operator $A = A^*$ der Satz

VII. *Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten eines symmetrischen Operators sind zueinander orthogonal.*

Ist U ein orthogonaler Operator auf dem euklidischen Vektorraum V und λ_U ein Eigenwert von U, so gilt für jeden Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ zum Eigenwert λ_U die Gleichung $(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = (\lambda_U \boldsymbol{x}, \lambda_U \boldsymbol{x}) = \lambda_U^2 \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Da ein Eigenvektor stets vom Nullvektor verschieden ist, folgt $\lambda_U^2 = 1$, d.h. $\lambda_U = 1$ oder $\lambda_U = -1$. Wir erhalten den Satz

VIII. *Ein orthogonaler Operator besitzt höchstens zwei verschiedene reelle Eigenwerte, die Zahlen $+1$ und -1.*

Sind $+1$ und -1 Eigenwerte des orthogonalen Operators U, so sind die Eigenräume $W(1) = (U - E)^{-1}(\{\boldsymbol{o}\})$ und $W(-1) = (U + E)^{-1}(\{\boldsymbol{o}\})$ zueinander orthogonal.

Zum Beweis der zweiten Aussage dieses Satzes bemerken wir lediglich, daß jeder Eigenvektor des orthogonalen Operators U zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 auch ein Eigenvektor des orthogonalen Operators $U^{-1} = U^*$ zum gleichen Eigenwert ist.

Wir machen den Leser darauf aufmerksam, daß ein orthogonaler Operator U keinen reellen Eigenwert zu besitzen braucht. Als Beispiel erwähnen wir eine Drehung $U_+(\varphi)$ $(0 < \varphi < \pi)$ im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(2)}$, die offenbar keinen eindimensionalen Teilraum in sich überführt.

Für einen schiefsymmetrischen Operator A gilt der Satz

IX. *Ein schiefsymmetrischer Operator besitzt dann und nur dann einen reellen Eigenwert, wenn er nicht regulär ist.*

Ein nicht regulärer schiefsymmetrischer Operator A besitzt genau einen reellen Eigenwert, die Zahl 0, und der zugehörige Eigenraum $W(0) = A^{-1}(\{o\})$ ist der Kern des Operators A.

Zum Beweis sei λ_A ein reeller Eigenwert des schiefsymmetrischen Operators A. Dann gilt für jeden zugehörigen Eigenvektor x

$$\lambda_A \cdot (x, x) = (\lambda_A x, x) = (Ax, x) = (x, -Ax) = (x, -\lambda_A x) = -\lambda_A \cdot (x, x),$$

und da für einen Eigenvektor $(x, x) \neq 0$ ist, folgt $\lambda_A = -\lambda_A = 0$. Für jeden Eigenvektor $x \neq o$ zum Eigenwert $\lambda_A = 0$ gilt $Ax = 0x = o$, und folglich ist der Operator A nicht regulär. Ist umgekehrt der Operator A nicht regulär, so gibt es einen Vektor $x \neq o$, $x \in V$, so daß $Ax = o = 0x$ gilt. Dann ist x ein Eigenvektor zum reellen Eigenwert 0 des Operators A, und der Satz IX ist bewiesen.

3. ORTHOGONALE, SYMMETRISCHE UND SCHIEFSYMMETRISCHE MATRIZEN; DREHUNGEN

Aus § 11 ist uns bekannt, daß man jeden linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ eines n-dimensionalen linearen Vektorraumes V nach Wahl einer Basis von V durch eine n-reihige quadratische Matrix beschreiben kann. Ist V ein euklidischer Vektorraum, so betrachten wir vorwiegend Orthonormalbasen von V. Wir bestimmen die den linearen Operatoren in bezug auf eine Orthonormalbasis zugeordneten Matrizen.

Es sei $A \in \mathscr{A}(V)$ ein linearer Operator und $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Die Matrix

$$\Phi_{\mathfrak{B}_0}(A) = A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$$

wird durch die Gleichungen

$$Ax_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} x_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

definiert. Es ist also

$$\alpha_{i'i} = (Ax_i, x_{i'}) = (x_{i'}, Ax_i)$$

und damit auch

$$\alpha_{i'i} = (A^* x_{i'}, x_i).$$

Ist $A^* = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A^*)$ die dem adjungierten Operator A^* zugeordnete Matrix, $A^* = \|\alpha^*_{i'i}\|_{n,n}$, so folgt

$$\alpha^*_{i'i} = (A^* x_i, x_{i'}) = (x_i, Ax_{i'}) = \alpha_{ii'} \quad (i', i = 1, \ldots, n).$$

Dem adjungierten Operator A entspricht die transponierte Matrix

$$A^* = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A^*) = A^{\mathsf{T}} = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A)^{\mathsf{T}}. \tag{15}$$

Diejenigen Matrizen U, die einem orthogonalen Operator $\boldsymbol{U}$ in bezug auf eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ von V entsprechen, heißen *orthogonale n-reihige Matrizen.*

Aus den Sätzen III und IV der Nr. 2 erhalten wir den Satz

X. *Eine reguläre n-reihige quadratische Matrix U ist dann und nur dann orthogonal, wenn*

$$U^{\mathsf{T}} = U^{-1} \tag{16}$$

oder

$$U^{\mathsf{T}} \cdot U = E = U \cdot U^{\mathsf{T}} \tag{17}$$

ist.

Aus der Gleichung (17) ergibt sich überdies das folgende Kriterium:

Eine Matrix $U = \|v_{i'i}\|_{n,n}$ ist dann und nur dann orthogonal, wenn ihre Elemente den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} v_{i'j} \cdot v_{ij} = \delta_{i'i} \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^{n} v_{ji'} \cdot v_{ji} = \delta_{i'i} \quad (i', i = 1, \ldots, n) \tag{17'}$$

genügen, wobei $\delta_{i'i}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Aus dem Satz V folgt:

XI. *Die orthogonalen n-reihigen Matrizen bilden eine Gruppe $O(n)$.*

Die Gruppe $O(n)$ heißt die *n-reihige orthogonale Gruppe.*

Aus der Gleichung (17) ergibt sich für den Wert der Determinante einer orthogonalen Matrix nach dem Multiplikationssatz der Determinante

$$1 = \det |E| = \det |U \cdot U^{\mathsf{T}}| = \det |U| \cdot \det |U^{\mathsf{T}}|$$

und, da $\det |U^{\mathsf{T}}| = \det |U|$ ist,

$$(\det |U|)^2 = 1.$$

Die Determinante nimmt auf den orthogonalen Matrizen nur die Werte $+1$ oder -1 an. Da die Determinante für lineare Operatoren durch die Werte der Determinante auf den ihnen zugeordneten Matrizen definiert ist, erhalten wir den Satz

XII. *Der Wert der Determinante eines orthogonalen Operators $\boldsymbol{U}$ bzw. einer orthogonalen Matrix U ist $+1$ oder -1.*

Bezeichnet E_- diejenige n-reihige Diagonalmatrix, deren sämtliche Diagonalelemente bis auf das letzte gleich $+1$ sind, während das letzte Diagonalelement -1

ist, also

$$E_- = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

so ist E_- eine orthogonale Matrix und $\det |E_-| = -1$.

Ist $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine feste Orthonormalbasis des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes und $\boldsymbol{E}_-$ derjenige orthogonale Operator, dem die Matrix E_- in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_0$ entspricht, so ist $\det \boldsymbol{E}_- = -1$.

Die orthogonalen Operatoren, deren Determinante gleich $+1$ ist, heißen *eigentlich orthogonale Operatoren* oder *Drehungen* (mitunter auch *eigentliche Drehungen*). Die orthogonalen Operatoren, deren Determinante gleich -1 ist, heißen *uneigentlich orthogonale Operatoren* oder *uneigentliche Drehungen*. Den uneigentlich orthogonalen Operator $\boldsymbol{E}_-$ nennen wir eine *Spiegelung* an dem von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ aufgespannten $(n-1)$-dimensionalen Teilraum.

Entsprechend heißt eine orthogonale n-reihige Matrix *eigentlich* oder *uneigentlich orthogonal*, je nachdem, ob ihre Determinante den Wert $+1$ oder -1 hat.

Wir beweisen den Satz

XIII. *Die eigentlich orthogonalen Operatoren eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V bilden eine Gruppe $\mathfrak{d}_n$.*

Jeder uneigentlich orthogonale Operator $\boldsymbol{U}_- \in \mathfrak{D}_n$ läßt sich als Produkt der Spiegelung $\boldsymbol{E}_-$ mit einem eigentlich orthogonalen Operator $\boldsymbol{U}_+ \in \mathfrak{d}_n$ schreiben:

$$\boldsymbol{U}_- = \boldsymbol{U}_+ \boldsymbol{E}_- .$$

Die eigentlich orthogonalen n-reihigen Matrizen bilden eine Gruppe $O_+(n)$.

Jede uneigentlich orthogonale Matrix $U_- \in O(n)$ läßt sich in der Form

$$U_- = U_+ \cdot E_-$$

schreiben. Dabei ist E_- die durch die Gleichung (18) *gegebene Matrix, und $U_+ \in O_+(n)$ ist eine eigentlich orthogonale Matrix.*

Zum Beweis von Satz XIII genügt es, die beiden Aussagen über die orthogonalen Operatoren zu beweisen. Die übrigen Aussagen erhält man unmittelbar, wenn man von den Operatoren zu den ihnen bezüglich einer Orthonormalbasis zugeordneten Matrizen übergeht. Da das Produkt von linearen Operatoren dem assoziativen Gesetz genügt, brauchen wir zum Beweis der ersten Aussage nur zu zeigen, daß a) das Produkt zweier eigentlich orthogonaler Operatoren ein eigentlich orthogonaler Operator ist, b) der Einsoperator $\boldsymbol{E}$ eigentlich orthogonal ist und c) die Inverse eines eigentlich orthogonalen Operators ein eigentlich orthogonaler Operator ist. Die Behauptung a) folgt unmittelbar aus dem Multiplikationssatz der Determinante, die Behauptung b) ist trivialerweise richtig, und c) ergibt sich aus der Gleichung $\det(\boldsymbol{U}^{-1}) = (\det \boldsymbol{U})^{-1}$

Ist nun U_- ein uneigentlich orthogonaler Operator, d. h., ist $\det(U_-) = -1$, so ist $\det(U_- E_-) = +1$, und da das Produkt zweier orthogonaler Operatoren ein orthogonaler Operator ist, erhalten wir einen eigentlich orthogonalen Operator $U_+ = U_- E_-$. Die Gleichung $U_- = U_+ E_-$ folgt dann unmittelbar aus der Gleichung $E_-^2 = E$.

Die Gruppe $\mathfrak{d}_n$ heißt die *n-dimensionale Drehgruppe* oder auch die *n-dimensionale eigentliche Drehgruppe* im Unterschied zur n-dimensionalen allgemeinen Drehgruppe $\mathfrak{D}_n$.

Die Gruppe $O_+(n)$ heißt die *n-reihige eigentlich orthogonale Gruppe.*

In § 15, Nr. 2 haben wir die Bezeichnung Drehgruppe für die Gruppe $\mathfrak{d}_2$ gerechtfertigt, indem wir gezeigt haben, daß jeder eigentlich orthogonale Operator $U \in \mathfrak{d}_2$ eine Drehung des zweidimensionalen euklidischen Raumes $V^{(2)}$ um einen Winkel φ definiert. Wir wollen eine entsprechende Aussage für den allgemeinen Fall beweisen. Dazu stützen wir uns auf eine beliebig gewählte Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes V, die wir im folgenden festhalten. Mit $U_{ij}(\varphi)$ bezeichnen wir denjenigen eigentlich orthogonalen Operator auf dem euklidischen Vektorraum V, dem in bezug auf die gewählte Basis die Matrix

$$U_{ij}(\varphi) = \left\| \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \cos\varphi & 0 & \ldots & 0 & -\sin\varphi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \sin\varphi & 0 & \ldots & 0 & \cos\varphi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| \tag{19}$$

entspricht. Es gilt

$$U_{ij}(\varphi)\, x_i = \cos\varphi x_i + \sin\varphi x_j,$$

$$U_{ij}(\varphi)\, x_j = -\sin\varphi x_i + \cos\varphi x_j,$$

$$U_{ij}(\varphi)\, x_k = x_k \quad (k = 1, \ldots, n;\ k \neq i,\ k \neq j),$$

und der Operator $U_{ij}(\varphi)$ beschreibt eine Drehung des zweidimensionalen Teilraumes $W_{ij} = L(\{x_i, x_j\})$ um den Winkel φ.

Es sei $U_+ \in \mathfrak{d}_n$ ein beliebiger eigentlich orthogonaler Operator auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und $U_+ = \|v_{i'i}\|_{n,n} = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(U_+)$ die ihm zugeordnete eigentlich orthogonale Matrix. Bilden wir das Produkt $U' = U_+(U_{12}(\varphi))^{-1} = U_+ U_{12}(-\varphi)$, so entspricht diesem Operator die Matrix

$$U_+ \cdot U_{12}(-\varphi) = \left\| \begin{matrix} v_{11}\cdot\cos\varphi - v_{12}\cdot\sin\varphi & v_{11}\cdot\sin\varphi + v_{12}\cdot\cos\varphi & v_{13} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21}\cdot\cos\varphi - v_{22}\cdot\sin\varphi & v_{21}\cdot\sin\varphi + v_{22}\cdot\cos\varphi & v_{23} & \ldots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \ldots & v_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \ldots & v_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Der Winkel $\varphi = \varphi_{12}$ $(0 \leqq \varphi_{12} < 2\pi)$ läßt sich stets so wählen, daß

$$v_{11}\cdot\sin\varphi_{12} + v_{12}\cdot\cos\varphi_{12} = 0,$$

$$v_{11}\cdot\cos\varphi_{12} - v_{12}\cdot\sin\varphi_{12} \geqq 0$$

ist. Setzen wir $U' = \|v'_{i'i}\|_{n,n} = U_+ \cdot U_{12}(-\varphi_{12})$, so ist $v'_{11} \geqq 0$ und $v'_{12} = 0$, und die Matrix U' entspricht dem eigentlich orthogonalen Operator U' in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_0$.

Wir bilden nun $U'' = U'(U_{13}(\varphi))^{-1}$. Den Winkel $\varphi = \varphi_{13}$ $(0 \leqq \varphi_{13} < 2\pi)$ wählen wir so, daß

$$v'_{11} \cdot \sin \varphi_{13} + v'_{13} \cdot \cos \varphi_{13} = 0,$$

$$v'_{11} \cdot \cos \varphi_{13} - v'_{13} \cdot \sin \varphi_{13} \geqq 0$$

ist. In der eigentlich orthogonalen Matrix $U'' = \|v''_{i'i}\|_{n,n} = U' \cdot U_{13}(-\varphi_{13})$ ist dann $v''_{11} \geqq 0$, $v''_{12} = v''_{13} = 0$, usw. Nach $n - 1$ Schritten erhalten wir den eigentlich orthogonalen Operator

$$U^{(n-1)} = U_+(U_{12}(\varphi_{12}))^{-1} \cdots (U_{1n}(\varphi_{1n}))^{-1},$$

und in der ihm zugeordneten Matrix $U^{(n-1)} = \|v^{(n-1)}_{i'i}\|_{n,n}$ ist $v^{(n-1)}_{11} \geqq 0$, $v^{(n-1)}_{12} = \cdots = v^{(n-1)}_{1n} = 0$.

Wenn wir die Gleichungen (17') für die erste Zeile und die erste Spalte der Matrix $U^{(n-1)}$ aufschreiben, erhalten wir

$$(v^{(n-1)}_{11})^2 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i'=1}^{n} (v^{(n-1)}_{i'1})^2 = 1.$$

Da $v^{(n-1)}_{11} \geqq 0$ ist, folgt hieraus

$$v^{(n-1)}_{11} = 1,\ v^{(n-1)}_{21} = \cdots = v^{(n-1)}_{n1} = 0,$$

und die Matrix $U^{(n-1)}$ besitzt die Form

$$U^{(n-1)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v^{(n-1)}_{22} & \dots & v^{(n-1)}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v^{(n-1)}_{n2} & \dots & v^{(n-1)}_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Wir bilden $U^{(n)} = U^{(n-1)}(U_{23}(\varphi))^{-1}$ und bestimmen den Winkel $\varphi = \varphi_{23}$ $(0 \leqq \varphi_{23} < 2\pi)$ so, daß

$$v^{(n-1)}_{22} \cdot \sin \varphi + v^{(n-1)}_{23} \cdot \cos \varphi = 0,$$

$$v^{(n-1)}_{22} \cdot \cos \varphi - v^{(n-1)}_{23} \cdot \sin \varphi \geqq 0$$

ist. Für die orthogonale Matrix $U^{(n)} = \|v^{(n)}_{i'i}\|_{n,n}$ gilt dann $v^{(n)}_{11} = 1$, $v^{(n)}_{1i} = v^{(n)}_{i1} = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, $v^{(n)}_{22} \geqq 0$ und $v^{(n)}_{23} = 0$, usw. Nach insgesamt $m = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ Schritten entspricht dem Operator $U^{(m)}$ die Einheitsmatrix E in bezug auf die feste Basis $\mathfrak{B}_0$, und es gilt

$$U^{(m)} = U_+ \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (U_{ij}(\varphi_{ij}))^{-1} = E.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von rechts sukzessive mit $U_{n-1,n}(\varphi_{n-1,n})$, $U_{n-2,n}(\varphi_{n-2,n})$, $U_{n-2,n-1}(\varphi_{n-2,n-1})$ usw., so erhalten wir

$$U_+ = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-i-1} U_{n-i,n-j}(\varphi_{n-i,n-j}). \tag{20}$$

XIV. *Jeder eigentlich orthogonale Operator $U_+ \in \mathfrak{d}_n$ ist das Produkt von höchstens $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ Drehungen in geeignet gewählten zweidimensionalen Teilräumen W_{ij} um geeignet gewählte Winkel φ_{ij} $(i < j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$.*

Jede eigentlich orthogonale Matrix $U_+ \in O_+(n)$ läßt sich als Produkt von höchstens $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ Matrizen der Form (19) *schreiben.*

Durch den Satz XIV haben wir einen Überblick über die eigentlich orthogonalen Operatoren eines euklidischen Vektorraumes gewonnen und die Bezeichnung „Drehungen" für diese Operatoren gerechtfertigt.

1°. Als Beispiel betrachten wir den dreidimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(3)}$. Ist U_+ ein eigentlich orthogonaler Operator auf $V^{(3)}$, so gibt es drei Winkel φ, ψ, ϑ, so daß

$$U_+ = U_{23}(\vartheta) U_{13}(\psi) U_{12}(\varphi)$$

gilt. Ist $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ die ausgezeichnete Orthonormalbasis von $V^{(3)}$, in bezug auf die der Operator U_+ die obige Zerlegung besitzt, so gilt für die ihm zugeordnete Matrix U_+

$$U_+ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Jede dreireihige eigentlich orthogonale Matrix läßt sich in dieser Form darstellen.

Betrachten wir speziell den dreidimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathfrak{V}^{(3)}$ der Translationen des Raumes und denken uns die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ einer Orthonormalbasis durch in einem festen Punkt P angetragene gerichtete Strecken $\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_2}, \overrightarrow{PP_3}$ repräsentiert, so beschreibt der Operator $U_{12}(\varphi)$ eine Drehung um den Winkel φ mit $\overrightarrow{PP_3}$ als Drehachse. Dabei werden die Strecken $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{PP_2}$ in zueinander senkrechte Strecken $\overrightarrow{PP_1'}$ und $\overrightarrow{PP_2'}$ übergeführt. Wenden wir nun den Operator $U_{13}(\psi)$ an, so bedeutet dies, daß wir mit dem Winkel ψ um die Achse $\overrightarrow{PP_2'}$ drehen. Die Strecken $\overrightarrow{PP_1'}$ und $\overrightarrow{PP_3}$ werden dabei in zueinander senkrechte Strecken $\overrightarrow{PP_1''}$ und $\overrightarrow{PP_3'}$ übergeführt. Der Operator $U_{23}(\vartheta)$ bedeutet schließlich eine Drehung mit dem Winkel ϑ um die Achse $\overrightarrow{PP_1''}$. Die Strecken $\overrightarrow{PP_2'}$ und $\overrightarrow{PP_3'}$ werden dabei in zueinander senkrechte Strecken $\overrightarrow{PP_2''}$ und $\overrightarrow{PP_3''}$ übergeführt.

Ist $U_+ = U_{23}(\vartheta) U_{13}(\psi) U_{12}(\varphi)$, so repräsentieren die paarweise senkrechten Strecken $\overrightarrow{PP_1''}$, $\overrightarrow{PP_2''}$ und $\overrightarrow{PP_3''}$ die neue Orthonormalbasis $U_+\mathfrak{x}_1, U_+\mathfrak{x}_2, U_+\mathfrak{x}_3$. Jeden eigentlich orthogonalen Operator U_+

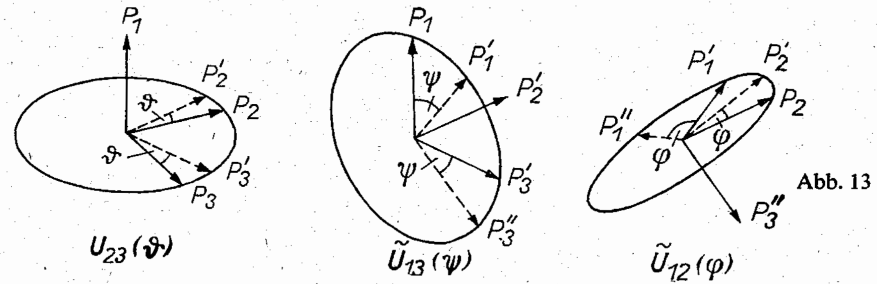


Abb. 13

können wir als eine Drehung des dreidimensionalen Raumes um den Punkt P interpretieren (vgl. Abb. 13).

Ist umgekehrt eine Drehung des dreidimensionalen Raumes um einen Punkt P gegeben, so gehen drei paarweise senkrechte gerichtete Strecken $\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP_2}, \overrightarrow{PP_3}$ der Länge 1 in drei ebensolche gerichtete Strecken $\overrightarrow{PP_1''}, \overrightarrow{PP_2''}, \overrightarrow{PP_3''}$ über. Da jedes Tripel paarweise senkrechter gerichteter Strecken der Länge 1 eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $\mathfrak{V}^{(3)}$ repräsentiert, entspricht der gegebenen Drehung eine Abbildung des $\mathfrak{V}^{(3)}$, die eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführt. Man kann sich leicht überlegen, daß diese Abbildung linear und ein eigentlich orthogonaler Operator U auf dem Vektorraum $\mathfrak{V}^{(3)}$ ist (vgl. auch Satz XV).

Zwischen den Drehungen des dreidimensionalen Raumes und den eigentlich orthogonalen Operatoren des dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung, die die Bezeichnung „Drehungen“ für die eigentlich orthogonalen Operatoren noch einmal unterstreicht.

2°. Wir betrachten im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(3)}$ denjenigen orthogonalen Operator U, dem in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ die Matrix

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix}$$

entspricht. Wir bilden das Produkt $UU_{12}(-\varphi)$ und erhalten

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \tan\varphi = \sqrt{3}.$$

Es ist also

$$\varphi_{12} = \frac{\pi}{3} \quad \text{oder} \quad \varphi_{12} = \frac{4 \cdot \pi}{3}.$$

Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\varphi \geqq 0$$

folgt, daß nur der erste Wert in Frage kommt. Es ist

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$U \cdot U_{12}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix}.$$

Wir erhalten die Matrizengleichung

$$U = U_{23}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot U_{13}(0) \cdot U_{12}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

oder die Operatorengleichung

$$U = U_{23}\left(\frac{\pi}{6}\right) U_{13}(0)\, U_{12}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Der orthogonale Operator U läßt sich durch eine Drehung um den Vektor x_3 mit dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ und eine Drehung um den Vektor $x_1' = U_{12}\left(\frac{\pi}{3}\right) x_1$ mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ beschreiben. U ist ein eigentlich orthogonaler Operator.

Ist A ein symmetrischer Operator, dem in bezug auf eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ die Matrix A entspricht, so folgt aus den Gleichungen (10) und (15)

$$A^{\mathrm{T}} = A. \tag{21}$$

Einem symmetrischen Operator A entspricht eine symmetrische Matrix.

Ist A ein schiefsymmetrischer Operator, dem in bezug auf eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ die Matrix A entspricht, so folgt aus den Gleichungen (12) und (15)

$$A^{\mathrm{T}} = -A. \tag{22}$$

Eine derartige Matrix heißt *schiefsymmetrisch.*

Einem schiefsymmetrischen Operator A entspricht eine schiefsymmetrische Matrix.

4. DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER KOORDINATEN EINES VEKTORS IN EINEM EUKLIDISCHEN VEKTORRAUM; DAS TRANSFORMATIONSGESETZ DER EINEM OPERATOR ZUGEORDNETEN MATRIX IN EINEM EUKLIDISCHEN VEKTORRAUM

Ist U ein orthogonaler Operator und $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$(U\boldsymbol{x}_{i'}, U\boldsymbol{x}_i) = (\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) = \delta_{i'i} \quad (i', i = 1, \ldots, n),$$

und folglich ist $U\mathfrak{B}_0 = \{U\boldsymbol{x}_1, \ldots, U\boldsymbol{x}_n\}$ wiederum eine Orthonormalbasis von V. Ist umgekehrt U ein linearer Operator, der die Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ auf eine Orthonormalbasis $U\mathfrak{B}_0 = \{U\boldsymbol{x}_1, \ldots, U\boldsymbol{x}_n\}$ abbildet, so gilt für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{x} = \sum_{i'=1}^{n} \xi_{i'}\boldsymbol{x}_{i'}$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{x}_i$

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i'=1}^{n} \xi_{i'} U\boldsymbol{x}_{i'}, \sum_{i=1}^{n} \eta_i U\boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i'} \cdot \eta_i \cdot (U\boldsymbol{x}_{i'}, U\boldsymbol{x}_i)$$

$$= \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i'} \cdot \eta_i \cdot (\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \eta_i .$$

Andererseits ist

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i'=1}^{n} \xi_{i'} \boldsymbol{x}_{i'}, \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i'} \cdot \eta_i \cdot (\boldsymbol{x}_{i'}, \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \eta_i ,$$

und folglich ist U ein orthogonaler Operator.

Wir haben folgendes Kriterium bewiesen:

XV. *Ein linearer Operator $U \in \mathscr{A}(V)$ ist dann und nur dann orthogonal, wenn er eine Orthonormalbasis von V auf eine Orthonormalbasis abbildet.*

Sind $\mathfrak{B}_0^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{B}_0^{(2)} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ zwei Orthonormalbasen des euklidischen Vektorraumes V, so wird durch die Gleichungen

$$y_i = Ux_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ein linearer Operator $U \in \mathscr{A}(V)$ definiert, der nach dem obigen Satz orthogonal ist. Es sei $U = \|v_{i'i}\|_{n,n}$ die dem Operator U bezüglich der Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ entsprechende orthogonale Matrix. Dann erhalten wir aus § 11, Nr. 4, Satz VII unter Berücksichtigung der Gleichungen (16) folgenden Satz:

XVI. *Sind* $\mathfrak{B}_0^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *und* $\mathfrak{B}_0^{(2)} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *zwei Orthonormalbasen des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes* V *und ist*

$$y_i = \sum_{i'=1}^{n} v_{i'i} x_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

so ist $U = \|v_{i'i}\|_{n,n} \in O(n)$ *eine orthogonale Matrix, und es gilt*

$$x_i = \sum_{i'=1}^{n} v_{ii'} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{23'}$$

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *bzw.* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *die Koordinaten eines Vektors* $x \in V$ *in bezug auf die Orthonormalbasis* $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ *bzw.* $\mathfrak{B}_0^{(2)}$, *so gilt*

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} v_{i'i} \cdot \eta_i \quad \textit{und} \quad \eta_{i'} = \sum_{i=1}^{n} v_{ii'} \cdot \xi_i \quad (i' = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Vektors x in bezug auf verschiedene Orthonormalbasen eines euklidischen Vektorraumes wird also durch eine orthogonale Matrix vermöge der Gleichungen (24) beschrieben. Die Gleichungen (24) werden das *Transformationsgesetz der Koordinaten eines Vektors in einem euklidischen Vektorraum* genannt. Entsprechend erhalten wir aus § 11, Nr. 6, Satz X:

XVII. *Ist* $A \in \mathscr{A}(V)$ *ein linearer Operator auf dem euklidischen Vektorraum* V *und sind* $A^{(1)}$ *bzw.* $A^{(2)}$ *die dem Operator* A *bezüglich der Orthonormalbasen* $\mathfrak{B}_0^{(1)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *bzw.* $\mathfrak{B}_0^{(2)} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *zugeordneten quadratischen Matrizen, so gilt*

$$A^{(2)} = U^{\mathsf{T}} \cdot A^{(1)} \cdot U \quad \textit{und} \quad A^{(1)} = U \cdot A^{(2)} \cdot U^{\mathsf{T}}. \tag{25}$$

Dabei ist $U = \|v_{i'i}\|_{n,n}$ *die durch die Gleichungen*

$$y_i = \sum_{i'=1}^{n} v_{i'i} x_{i'} \quad \textit{bzw.} \quad x_i = \sum_{i'=1}^{n} v_{ii'} y_{i'} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

definierte orthogonale Matrix.

5.* PROJEKTOREN; DIE ORTHOGONALE DIREKTE SUMME

Zum Schluß dieses Paragraphen betrachten wir die sogenannten Projektoren, die aufs engste mit der im vorhergehenden Paragraphen behandelten Orthogonalprojektion eines Vektors auf einen gegebenen Teilraum zusammenhängen. Wir erinnern den Leser ferner an die Untersuchungen von § 11, Nr. 7 über Projektionsoperatoren.

Ein symmetrischer linearer Operator P auf einem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V heißt *Projektor*, wenn $P^2 = P$ ist.

Aus den Ergebnissen von § 11, Nr. 7 ergibt sich:

Jeder Projektor P ist ein Projektionsoperator. Ist $W = PV$ derjenige Teilraum von V, auf den der Projektionsoperator P den Vektorraum V projiziert, so besteht W aus allen und nur den Fixvektoren von P.

Wir beweisen den folgenden Satz

XVIII. *Sind P_1 und P_2 Projektoren auf dem euklidischen Vektorraum V, die der Gleichung*

$$P_1 P_2 = O \quad oder \quad P_2 P_1 = O \tag{26}$$

genügen, so sind die zugehörigen Teilräume $W_1 = P_1 V$ und $W_2 = P_2 V$ orthogonal.

Zum Beweis betrachten wir einen Vektor $x_1 \in W_1$ und einen Vektor $x_2 \in W_2$. Dann gilt für das Skalarprodukt dieser Vektoren

$$(x_1, x_2) = (P_1 x_1, P_2 x_2) = (x_1, P_1 P_2 x_2) = (P_2 P_1 x_1, x_2) = 0,$$

und die Vektoren x_1 und x_2 sind zueinander orthogonal.

Ist P ein Projektor auf dem euklidischen Vektorraum V und $P' = E - P$, so ist auch P' ein Projektor.

Es gilt nämlich

$$(P'x, y) = ((E - P)x, y) = (Ex - Px, y) = (x, y) - (Px, y)$$
$$= (x, y) - (x, Py) = (x, Ey - Py) = (x, (E - P)y) = (x, P'y).$$

Der Operator P' ist also symmetrisch, und nach § 11, Nr. 7, Satz XVIII genügt er auch der Gleichung $P'^2 = P$.

Für die zugehörigen Teilräume $W = PV$ und $W' = PV'$ gilt (vgl. abermals § 11, Nr. 7, Satz XVIII)

$$V = W \dotplus W', \tag{27}$$

und nach Satz XVIII sind die Teilräume W und W' zueinander orthogonal.

Wir sagen: V ist die *orthogonale direkte Summe* von W und W'.

Ist $x \in V$, so gilt

$$x = Px + P'x.$$

Dabei ist $P'x \in W'$, und folglich ist $P'x$ ein zu allen Vektoren aus W orthogonaler Vektor. Da überdies $Px \in W$ ist, ist $Px = x^{(p)}$ die Orthogonalprojektion von x auf den Teilraum W und $P'x = x^{(l)}$ das Lot von x auf den Teilraum W.

Betrachten wir nun einen beliebigen Teilraum W des euklidischen Vektorraumes V und definieren eine Abbildung P von V in W durch

$$Px = x^{(p)},$$

wobei $x^{(p)}$ die Orthogonalprojektion von x auf W bezeichnet, so läßt sich beweisen, daß P ein Projektor auf dem euklidischen Vektorraum V und $W = PV$ ist.

Ist zunächst $x \in W$, so gilt $x = x + o$, und o ist ein zu allen Vektoren aus W orthogonaler Vektor, also ist $x^{(p)} = x$ und $Px = x^{(p)} = x$. Ist nun x ein beliebiger Vektor aus V, so ist $Px \in W$, und nach dem soeben Bemerkten ist $P^2 x = P(Px) = Px$. Es gilt also $P^2 = P$ und $PV = W$. Es bleibt zu zeigen,

daß $\boldsymbol{P}$ ein linearer Operator ist und der Symmetriebedingung (9) genügt. Es sei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{x}^{(l)}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(l)}$, dann ist $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(p)} + \boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{y}^{(l)}$, und es ist $\boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(p)} \in W$. Ferner gilt für jeden Vektor $\boldsymbol{z} \in W$

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{y}^{(l)}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}^{(l)}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}^{(l)}) = 0,$$

und $\boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{y}^{(l)}$ ist zu allen Vektoren $\boldsymbol{z} \in W$ orthogonal. Infolgedessen ist $\boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(p)}$ die Orthogonalprojektion von $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ auf W, und es gilt

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}.$$

Entsprechend beweist man die Gleichung $\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$. Betrachten wir die Skalarprodukte $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ und $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{y})$, so gilt

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(p)} + \boldsymbol{y}^{(l)}) = (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(p)}) + (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(l)}) = (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(p)}),$$

da $\boldsymbol{y}^{(l)}$ zu allen Vektoren aus W, also auch zu $\boldsymbol{x}^{(p)}$ orthogonal ist. Andererseits ist

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}^{(p)} + \boldsymbol{x}^{(l)}, \boldsymbol{y}^{(p)}) = (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(p)}) + (\boldsymbol{x}^{(l)}, \boldsymbol{y}^{(p)}) = (\boldsymbol{x}^{(p)}, \boldsymbol{y}^{(p)}),$$

da auch $\boldsymbol{x}^{(l)}$ zu allen Vektoren aus W, also auch zu $\boldsymbol{y}^{(p)}$ orthogonal ist. Aus beiden Gleichungen folgt

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{y})$$

für je zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. $\boldsymbol{P}$ ist ein symmetrischer Operator und damit ein Projektor.

Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

XIX. *Ist W ein Teilraum des euklidischen Vektorraumes V, so gibt es einen Projektor $\boldsymbol{P} \in \mathscr{A}(V)$, so daß $W = \boldsymbol{P}V$ der Raum aller Fixvektoren des Projektors $\boldsymbol{P}$ ist. Der Operator $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P} \in \mathscr{A}(V)$ ist ebenfalls ein Projektor, und der Raum seiner Fixvektoren $W' = \boldsymbol{P}'V$ ist zu W orthogonal. Darüber hinaus ist V die orthogonale direkte Summe der Teilräume W und W'.*

Den Teilraum W' nennt man auch das *orthogonale Komplement* zu W und bezeichnet ihn mit $W^{\perp}$. Offenbar ist W das orthogonale Komplement zu $W^{\perp}$, so daß $(W^{\perp})^{\perp} = W$ ist.

Die im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Zerlegung eines Vektors in seine Orthogonalprojektion und sein Lot auf einen Teilraum W entspricht der Zerlegung des euklidischen Vektorraumes V in die orthogonale direkte Summe des linearen Teilraumes W und seines orthogonalen Komplements $W^{\perp}$.*

6. AUFGABEN

1.* Man betrachte den in § 16, Nr. 6, Aufgabe 3 genannten euklidischen Vektorraum P_n und zerlege den Operator $\boldsymbol{D}$ (vgl. § 11, Nr. 2, 1°) in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Anteil.

2. Ist $V^{(3)}$ der dreidimensionale euklidische Vektorraum und $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ eine ausgezeichnete Orthonormalbasis, so definieren die Matrizen

$$E_{-}^{(1)} = \left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|, \quad E_{-}^{(2)} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

uneigentlich orthogonale Operatoren $\boldsymbol{E}_{-}^{(1)}, \boldsymbol{E}_{-}^{(2)}$. Man bestimme die eigentlich orthogonalen Operatoren $\boldsymbol{U}_{+}^{(1)}, \boldsymbol{U}_{+}^{(2)}$, für die die Gleichungen

$$\boldsymbol{E}_{-}^{(1)} = \boldsymbol{U}_{+}^{(1)}\boldsymbol{E}_{-}, \quad \boldsymbol{E}_{-}^{(2)} = \boldsymbol{U}_{+}^{(2)}\boldsymbol{E}_{-}$$

gelten, sowie die ihnen entsprechenden Matrizen.

3. Man berechne die reellen Eigenwerte des im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(2)}$ in bezug auf eine feste Normalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2\}$ durch die Matrix

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \beta & \alpha_2 \end{Vmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Operators A und bestimme die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenräume.

4.* Nach Satz II wird durch die Gleichung

$$z^*(x) = (I^*z^*, x)$$

eine Abbildung I^* von V^* in V definiert. Man zeige: I^* ist ein Isomorphismus des dualen Vektorraumes V^* auf den Vektorraum V, und es gilt

$$\langle z^*, x \rangle = (I^*z^*, x).$$

Durch die Gleichung

$$(z^*, z^*) = (I^*z^*, I^*z^*)$$

wird in V^* eine positiv definite quadratische Form definiert, und V^* kann als euklidischer Vektorraum aufgefaßt werden. Der Isomorphismus I^* ist eine Isometrie des euklidischen Vektorraumes V^* auf den euklidischen Vektorraum V.

5. Warum bilden die regulären symmetrischen Operatoren keine Gruppe bezüglich der für lineare Operatoren erklärten Multiplikation?

Warum bilden die regulären schiefsymmetrischen Operatoren keine Gruppe bezüglich der für lineare Operatoren erklärten Multiplikation?

6.* Das Produkt P_1P_2 zweier Projektoren P_1, P_2 ist dann und nur dann ein Projektor, wenn $P_1P_2 = P_2P_1$ ist.

7.* Die Summe $P = P_1 + \cdots + P_m$ der Projektoren $P_1, \ldots, P_m$ ist dann und nur dann ein Projektor, wenn $P_iP_j = O$ für $i \neq j$ ist; PV ist dann die orthogonale direkte Summe der Teilräume $P_1V, \ldots, P_mV$.

§ 19. DIE NORMALFORM SYMMETRISCHER, SCHIEFSYMMETRISCHER UND ORTHOGONALER OPERATOREN

1. EINLEITUNG

Für die im Titel dieses Paragraphen genannten Klassen linearer Operatoren auf einem euklidischen Vektorraum werden sogenannte Normalformen angegeben. Das bedeutet folgendes: Zu einem festen symmetrischen, schiefsymmetrischen oder orthogonalen Operator auf einem euklidischen Vektorraum wird eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraumes derart bestimmt, daß die dem betrachteten Operator in bezug auf diese Orthonormalbasis entsprechende Matrix eine besonders einfache Gestalt hat. Diese Matrix nennt man die Normalform des betrachteten Operators. An ihr läßt sich in einfacher Weise ablesen, wie der gegebene Operator auf den euklidischen Vektorraum wirkt. Ein wichtiges Hilfsmittel für unsere Untersuchungen sind die in § 11, Nr. 6 eingeführten Begriffe Eigenwert und Eigenvektor eines linearen Operators.

2. DIE ZERLEGUNG DER CHARAKTERISTISCHEN FUNKTION; EIN- UND ZWEIDIMENSIONALE INVARIANTE TEILRÄUME

Die Eigenwerte eines linearen Operators kann man nach § 13, Nr. 6, Satz XIX als die reellen Nullstellen seiner charakteristischen Funktion bestimmen. Die charakteristische Funktion eines linearen Operators spielt in den folgenden Überlegungen eine wesentliche Rolle, und wir geben zunächst einige Sätze an, deren Beweise über den Rahmen dieses Buches hinausgehen, so daß wir gezwungen sind, sie zu unterdrücken.

Ist $f_A(x)$ die charakteristische Funktion eines linearen Operators A auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V, so gilt

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n). \tag{1}$$

Die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der ganzen rationalen Funktion $f_A(x)$ sind komplexe Zahlen.

Wir nehmen an, daß unter den n komplexen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s reelle Zahlen vorkommen ($0 \leqq s \leqq n$) und wählen die Indizierung so, daß $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die reellen Nullstellen von $f_A(x)$ bezeichnen.

Ist $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ ($s < j \leqq n$) eine nicht reelle Nullstelle von $f_A(x)$, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ eine Nullstelle von $f_A(x)$. Es gibt also einen Index j' ($s < j' \leqq n$), so daß $\lambda_{j'} = \bar{\lambda}_j$ ist. Insbesondere ist $n - s$ eine gerade Zahl. Wir setzen $n - s = 2 \cdot t$ und wählen die Indizierung der Nullstellen so, daß $\bar{\lambda}_j = \lambda_{j+t}$ ($j = s + 1, \ldots, s + t$) ist. Die Gleichung (1) können wir dann in der Form

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_s) \cdot (x - \lambda_{s+1}) \cdots (x - \lambda_{s+t}) \cdot (x - \bar{\lambda}_{s+1}) \cdots (x - \bar{\lambda}_{s+t})$$

schreiben ($s + 2 \cdot t = n$). (1')

Wir weisen den Leser darauf hin, daß die $s + t$ komplexen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+t}$ nicht alle verschieden zu sein brauchen.

Ist λ_j ($1 \leqq j \leqq s$) eine reelle Nullstelle von $f_A(x)$, so ist λ_j ein Eigenwert des Operators A, und es gibt einen Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ zum Eigenwert λ_j. Es gilt $A\boldsymbol{x} = \lambda_j \boldsymbol{x}$, und $L(\{\boldsymbol{x}\})$ ist ein eindimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum von V.

Ist $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j, \bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ ($s < j \leqq s + t$) ein Paar nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen ($\tau_j \neq 0$) von $f_A(x)$, so können wir diesen Nullstellen einen zweidimensionalen, bezüglich A invarianten Teilraum von V zuordnen. Dazu betrachten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (A - \sigma_j E)\,\boldsymbol{x} + \tau_j \boldsymbol{y} &\doteq \boldsymbol{o}, \\ -\tau_j \boldsymbol{x} + (A - \sigma_j E)\,\boldsymbol{y} &\doteq \boldsymbol{o}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ist $\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\}$ eine beliebige Basis von V und ist $\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{z}_n$, $\boldsymbol{y} = \xi_{n+1} \boldsymbol{z}_1 + \cdots + \xi_{2\cdot n} \boldsymbol{z}_n$ sowie $A\boldsymbol{z}_i = \sum_{i'=1}^{n} \alpha_{i'i} \boldsymbol{z}_{i'}$ ($i = 1, \ldots, n$), so erhalten wir aus

den Gleichungen (2) das folgende homogene lineare Gleichungssystem von $2 \cdot n$ Gleichungen in $\xi_1, \ldots, \xi_{2\cdot n}$:

$$\left.\begin{array}{llll}
(\alpha_{11}-\sigma_j)\cdot\xi_1+\cdots+ & \alpha_{1n}\cdot\xi_n+ & \tau_j\cdot\xi_{n+1} & \doteq 0,\\
\alpha_{21}\cdot\xi_1+\cdots+ & \alpha_{2n}\cdot\xi_n+ & & \doteq 0,\\
\vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots\\
\alpha_{n1}\cdot\xi_1+\cdots+(\alpha_{nn}-\sigma_j)\cdot\xi_n+ & & \tau_j\cdot\xi_{2\cdot n} & \doteq 0,\\
-\tau_j\cdot\xi_1 & +(\alpha_{11}-\sigma_j)\cdot\xi_{n+1}+\cdots+ & \alpha_{1n}\cdot\xi_{2\cdot n} & \doteq 0,\\
 & +\quad \alpha_{21}\cdot\xi_{n+1}+\cdots+ & \alpha_{2n}\cdot\xi_{2\cdot n} & \doteq 0,\\
 & \vdots \qquad \vdots \quad \vdots & & \vdots\\
-\tau_j\cdot\xi_n+ & \alpha_{n1}\cdot\xi_{n+1}+\cdots+ & (\alpha_{nn}-\sigma_j)\cdot\xi_{2\cdot n} & \doteq 0.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem besitzt dann und nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante seiner Koeffizientenmatrix den Wert Null hat.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (3) schreiben wir in der Form

$$\left\|\begin{matrix} A-\sigma_j E & \tau_j E \\ -\tau_j E & A-\sigma_j E \end{matrix}\right\|.$$

Dabei ist $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ die dem Operator A bezüglich $\mathfrak{B}$ entsprechende n-reihige quadratische Matrix und E die n-reihige quadratische Einheitsmatrix. Da die Matrizen $A - \sigma_j E$ und $\tau_j E$ vertauschbar sind, gilt nach § 13, Nr. 7, Formel (22) für den Wert der Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\det_{2\cdot n}\begin{vmatrix} A-\sigma_j E & \tau_j E \\ -\tau_j E & A-\sigma_j E \end{vmatrix} = \det_n |(A-\sigma_j E)^2 + (\tau_j E)^2|.$$

Wie man unmittelbar nachrechnet, ist

$$(A-\sigma_j E)^2 + (\tau_j E)^2 = (A-(\sigma_j+i\tau_j)\,E)\cdot(A-(\sigma_j-i\tau_j)\,E),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\det_{2\cdot n}\begin{vmatrix} A-\sigma_j E & \tau_j E \\ -\tau_j E & A-\sigma_j E \end{vmatrix} &= \det_n |(A-\lambda_j E)\cdot(A-\bar\lambda_j E)| \\ &= \det_n |A-\lambda_j E| \cdot \det_n |A-\bar\lambda_j E| \\ &= f_A(\lambda_j)\cdot f_A(\bar\lambda_j) = 0.\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem (3) besitzt also eine nichttriviale Lösung, und folglich gibt es zwei Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$, von denen wenigstens einer, etwa $\boldsymbol{x}$, vom Nullvektor verschieden ist, so daß

$$\left.\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \sigma_j\boldsymbol{x} - \tau_j\boldsymbol{y}, \\ A\boldsymbol{y} &= \tau_j\boldsymbol{x} + \sigma_j\boldsymbol{y} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ist. Betrachten wir den von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ in V erzeugten linearen Teilraum $L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$, so ist $L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$ ein bezüglich A invarianter Teilraum, und es gilt $\dim L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}) \geqq 1$. Wäre $\dim L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}) = 1$, so wäre $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ mit einer reellen Zahl α. Setzen wir dies in die Gleichungen (4) ein, so erhalten wir

$$A\boldsymbol{x} = \sigma_j \boldsymbol{x} - (\tau_j \cdot \alpha)\, \boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad A\alpha\boldsymbol{x} = \tau_j \boldsymbol{x} + (\sigma_j \cdot \alpha)\, \boldsymbol{x}.$$

Dann wäre $\tau_j = -\tau_j \cdot \alpha^2$, woraus $\tau_j = 0$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Der lineare Teilraum $L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$ ist ein zweidimensionaler, bezüglich A invarianter Teilraum von V.

I. *Ist A ein linearer Operator auf dem euklidischen Vektorraum V, so gibt es zu jeder reellen Nullstelle λ_j $(1 \leqq j \leqq s)$ der charakteristischen Funktion $f_A(x)$ einen eindimensionalen, bezüglich A invarianten Teilraum von V, und zu jedem Paar nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$, $\bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ $(s < j \leqq n;\ \tau_j \neq 0)$ existiert ein zweidimensionaler, bezüglich A invarianter Teilraum von V.*

Als Folgerung erhalten wir aus diesem Satz:

II. *Ist A ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und ist n eine ungerade Zahl, so besitzt $f_A(x)$ stets eine reelle Nullstelle, und in V existiert ein eindimensionaler, bezüglich A invarianter Teilraum.*

3. DIE NORMALFORM SYMMETRISCHER OPERATOREN; *DIE SPEKTRALZERLEGUNG SYMMETRISCHER OPERATOREN*

Es sei $A \in \mathscr{A}(V)$ ein symmetrischer Operator auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V. Wir betrachten seine charakteristische Funktion

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_s) \cdot (x - \lambda_{s+1}) \cdots (x - \lambda_{s+t}) \cdot (x - \bar{\lambda}_{s+1}) \cdots (x - \bar{\lambda}_{s+t}).$$

Ist $s < n$, so besitzt die charakteristische Funktion $f_A(x)$ ein Paar konjugiert komplexer nicht reeller Nullstellen $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$, $\bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ $(s < j \leqq n;\ \tau_j \neq 0)$. Es sei $W = L(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$ der im vorhergehenden Abschnitt bestimmte zweidimensionale, bezüglich A invariante Teilraum von V. Da der Operator A den Teilraum W in sich abbildet, definieren wir einen linearen Operator $A_W \in \mathscr{A}(W)$ durch die Gleichung

$$A_W \boldsymbol{z} \underset{\text{Def.}}{=} A\boldsymbol{z} \quad (\boldsymbol{z} \in W).$$

Sind $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ beliebige Vektoren aus W, so gilt offenbar

$$(A_W \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = (A\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{z}_1, A\boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{z}_1, A_W \boldsymbol{z}_2),$$

und wir erhalten: *A_W ist ein symmetrischer linearer Operator auf dem Teilraum W.*

Es sei $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ eine Orthonormalbasis des Teilraumes W und

$$A_W \mathfrak{y}_1 = \beta_{11}\mathfrak{y}_1 + \beta_{21}\mathfrak{y}_2,$$

$$A_W \mathfrak{y}_2 = \beta_{12}\mathfrak{y}_1 + \beta_{22}\mathfrak{y}_2.$$

Da A_W ein symmetrischer Operator ist, ist die ihm zugeordnete Matrix symmetrisch, und es gilt

$$\beta_{12} = \beta_{21}.$$

Für die charakteristische Funktion des Operators A_W erhalten wir

$$\det(A_W - xE) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - x & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} - x \end{vmatrix} = x^2 - (\beta_{11} + \beta_{22}) \cdot x + (\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2).$$

Aus den Gleichungen (4) und der Definitionsgleichung des Operators A_W folgt andererseits für die den Teilraum W erzeugenden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$

$$A_W \mathfrak{x} = \sigma_j \mathfrak{x} - \tau_j \mathfrak{y},$$

$$A_W \mathfrak{y} = \tau_j \mathfrak{x} + \sigma_j \mathfrak{y}$$

und damit

$$\det(A_W - xE) = \begin{vmatrix} \sigma_j - x & \tau_j \\ -\tau_j & \sigma_j - x \end{vmatrix} = x^2 - 2 \cdot \sigma_j \cdot x + (\sigma_j^2 + \tau_j^2).$$

Es ist also

$$x^2 - (\beta_{11} + \beta_{22}) \cdot x + (\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2) = x^2 - 2 \cdot \sigma_j \cdot x + (\sigma_j^2 + \tau_j^2)$$

oder

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 2 \cdot \sigma_j \quad \text{und} \quad \beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2 = \sigma_j^2 + \tau_j^2.$$

Betrachten wir den Ausdruck

$$(\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4 \cdot (\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2) = 4 \cdot \sigma_j^2 - 4 \cdot (\sigma_j^2 + \tau_j^2),$$

so erhalten wir

$$(\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4 \cdot \beta_{12}^2 = -4 \cdot \tau_j^2,$$

was unmöglich ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nämlich stets $\geqq 0$, während aus unserer Voraussetzung $\tau_j \neq 0$ folgt, daß die rechte Seite negativ ist. Die Annahme $s < n$ führt zum Widerspruch, und wir erhalten den wichtigen Satz

III. *Die Nullstellen der charakteristischen Funktion eines symmetrischen Operators sind alle reell*:

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \quad \textit{und} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R. \tag{5}$$

Bezeichnen wir mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Nullstellen der charakteristischen Funktion $f_A(x)$, d. h. die verschiedenen reellen Eigenwerte des symmetrischen Ope-

rators A, und fassen in der Gleichung (5) gleiche Nullstellen zusammen, so erhält $f_A(x)$ die Gestalt

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_m)^{\mu_m}. \tag{6}$$

Die positiven Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_m$ werden die *Vielfachheiten der verschiedenen Nullstellen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ genannt. Es gilt $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$.

Wir betrachten nun einen Eigenwert λ_i $(1 \leqq i \leqq m)$. Es sei $W(\lambda_i)$ der zugehörige Eigenraum. Dann ist nach § 11, Nr. 6, Satz XVI

$$\dim W(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i E) = d(A - \lambda_i E).$$

Wir bezeichnen die Dimension von $W(\lambda_i)$ mit ν_i und wählen eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\nu_i}$ von $W(\lambda_i)$, die wir zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ des euklidischen Vektorraumes V ergänzen. Berechnen wir die symmetrische Matrix $A = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A)$, die dem symmetrischen Operator A in bezug auf diese Basis zugeordnet ist, so gilt

$$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_i \boldsymbol{x}_j \qquad (j = 1, \ldots, \nu_i),$$

$$A\boldsymbol{x}_j = \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j} \boldsymbol{x}_{j'} \quad (j = \nu_i + 1, \ldots, n).$$

Dabei können wir die Koeffizienten $\alpha_{j'j}$ in der Form

$$\alpha_{j'j} = (\boldsymbol{x}_{j'}, A\boldsymbol{x}_j) \quad (j = \nu_i + 1, \ldots, n; j' = 1, \ldots, n)$$

schreiben. Für $j = \nu_i + 1, \ldots, n$ und $j' = 1, \ldots, \nu_i$ gilt aber

$$\alpha_{j'j} = (\boldsymbol{x}_{j'}, A\boldsymbol{x}_j) = (A\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{x}_j) = \lambda_{j'} \cdot (\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{x}_j) = 0,$$

und es ist

$$A\boldsymbol{x}_j = \sum_{j'=\nu_i+1}^{n} \alpha_{j'j} \boldsymbol{x}_{j'} \quad (j = \nu_i + 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Die Matrix A hat also die Form

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\nu_i+1,\nu_i+1} & \ldots & \alpha_{\nu_i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,\nu_i+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Aus der Gleichung (7) folgt überdies:

Der Teilraum $W'(\lambda_i) = L(\{\boldsymbol{x}_{\nu_i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$ *ist invariant bezüglich* A.

Bezeichnen wir mit $A^{(\nu_i)}$ die in der rechten unteren Ecke der symmetrischen Matrix A stehende symmetrische Teilmatrix, so ist

$$A^{(\nu_i)} = \begin{Vmatrix} \alpha_{\nu_i+1,\nu_i+1} & \cdots & \alpha_{\nu_i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,\nu_i+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix},$$

und für die charakteristische Funktion $f_A(x)$ gilt

$$f_A(x) = (-1)^{\nu_i} \cdot (x - \lambda_i)^{\nu_i} \cdot \det_{n-\nu_i} |A^{(\nu_i)} - xE|.$$

Es ist also

$$(-1)^n \cdot (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_i)^{\mu_i} \cdots (x - \lambda_m)^{\mu_m} = (-1)^{\nu_i} \cdot (x - \lambda_i)^{\nu_i} \cdot \det_{n-\nu_i} |A^{(\nu_i)} - xE|,$$

und da die reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nach Voraussetzung voneinander verschieden sind, folgt $\nu_i \leqq \mu_i$ oder

$$(-1)^n \cdot (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_i)^{\mu_i - \nu_i} \cdots (x - \lambda_m)^{\mu_m} = (-1)^{\nu_i} \cdot \det_{n-\nu_i} |A^{(\nu_i)} - xE|.$$

Aus der Gleichung $r(A - \lambda_i E) = n - \nu_i$ und der Darstellung (8) der Matrix A ergibt sich, daß $A^{(\nu_i)} - \lambda_i E$ eine reguläre Matrix ist. Es ist $\det_{n-\nu_i}|A^{(\nu_i)} - \lambda_i E| \neq 0$, und aus der obigen Gleichung folgt, daß $\mu_i - \nu_i = 0$ sein muß. Wir haben festgestellt:

IV. *Die Dimension des Eigenraumes $W(\lambda_i)$, der zum Eigenwert λ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des symmetrischen Operators $A \in \mathscr{A}(V)$ gehört, ist gleich der Vielfachheit der Nullstelle λ_i der charakteristischen Funktion $f_A(x)$.*

Wir betrachten die Eigenräume $W(\lambda_1), \ldots, W(\lambda_m)$ der Dimensionen $\mu_1, \ldots, \mu_m$ für die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und wählen in jedem dieser Eigenräume eine Orthonormalbasis $\overset{(\lambda_1)}{x}_1, \ldots, \overset{(\lambda_1)}{x}_{\mu_1}; \overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+\mu_2}; \ldots; \overset{(\lambda_m)}{x}_{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}+1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x}_{\mu_1+\cdots+\mu_m}$. Da $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$ ist, erhalten wir n Vektoren, die ein Orthonormalsystem, also eine Orthonormalbasis von V bilden. Zunächst ist $\left(\overset{(\lambda_i)}{x}_j, \overset{(\lambda_i)}{x}_j\right) = 1$ für $j = 1, \ldots, n$ nach Wahl der Vektoren $\overset{(\lambda_i)}{x}_j$. Betrachten wir den Wert des Skalarproduktes $\left(\overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}, \overset{(\lambda_i)}{x}_j\right)$ für $j' \neq j$, so ist nach Definition $\left(\overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}, \overset{(\lambda_i)}{x}_j\right) = 0$, wenn $i' = i$ ist, d. h., wenn $\overset{(\lambda_i)}{x}_{j'}$ und $\overset{(\lambda_i)}{x}_j$ dem gleichen Eigenraum $W(\lambda_i)$ angehören. Ist $i' \neq i$, so gehören die Vektoren $\overset{(\lambda_i)}{x}_{j'}$ und $\overset{(\lambda_i)}{x}_j$ verschiedenen Eigenräumen an, und aus § 18, Nr. 2, Satz VII folgt $\left(\overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}, \overset{(\lambda_i)}{x}_j\right) = 0$.

V. *Ist $A \in \mathscr{A}(V)$ ein symmetrischer linearer Operator, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \left\{\overset{(\lambda_1)}{x}_1, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x}_n\right\}$ des euklidischen Vektorraumes V, die aus Eigenvektoren des Operators A besteht.*

Die Matrix $A^{(n)} = \Phi_{\mathfrak{B}_0^{(n)}}(A)$ des Operators A in bezug auf eine derart ausgezeichnete Basis nennen wir eine *Normalform des symmetrischen Operators A*.

Es ist

$$A^{(n)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_m & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & \lambda_m \end{Vmatrix} \tag{9}$$

eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die Nullstellen der charakteristischen Funktion stehen, und zwar jede mit der ihr zukommenden Vielfachheit. Ordnen wir die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nach der Größe, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$, so ist die Matrix $A^{(n)}$ durch den Operator A eindeutig bestimmt, und wir sprechen von *der* Normalform des symmetrischen Operators A.

Ist A eine beliebige symmetrische Matrix und $A \in \mathscr{A}(V)$ der symmetrische Operator, dem die Matrix A bei einer festen Orthonormalbasis entspricht, so erhalten wir durch Übergang zu einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren des Operators A aus § 18, Nr. 4, Satz XVII:

VI. *Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix U, so daß*

$$A = U \cdot A^{(n)} \cdot U^{\mathrm{T}} \quad \textit{und} \quad A^{(n)} = U^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot U$$

ist. Dabei ist $A^{(n)}$ die durch die Gleichung (9) *gegebene Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die nach der Größe geordneten Eigenwerte der Matrix A mit den entsprechenden Vielfachheiten stehen.*

Die Matrix $A^{(n)}$ wird die *euklidische Normalform der symmetrischen Matrix A* genannt.

1°. Als Beispiel betrachten wir den vierdimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(4)}$ und den symmetrischen Operator $\boldsymbol{A}$, dem in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ die symmetrische Matrix

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

entspricht. Es ist

$$f_A(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) = \det |A - xE|,$$

und wir erhalten

$$\begin{vmatrix} 2-x & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2-x & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1-x & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-x & -3 & -2 & 1 \\ -3-x & 2-x & -2 & -1 \\ -3-x & -2 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3-x & -2 & -1 \\ 1 & -3+x & 1-x & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (x+3)\cdot(x-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)\cdot(x-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3-x & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = -(x+3)\cdot(x-3)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix}$$

oder

$$f_A(x) = (x+3)\cdot(x-3)^2\cdot(x-6).$$

Der symmetrische Operator A besitzt die Eigenwerte $-3, 3, 6$.

Wir betrachten den Eigenwert -3. Den zugehörigen Eigenraum $W(-3)$ erhalten wir als Lösungsraum der homogenen Vektorgleichung

$$(A + 3E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Setzen wir $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1 + \xi_2\boldsymbol{x}_2 + \xi_3\boldsymbol{x}_3 + \xi_4\boldsymbol{x}_4$, so ist diese homogene Gleichung dem folgenden homogenen Gleichungssystem äquivalent:

$$\begin{aligned} 5\cdot\xi_1 - 3\cdot\xi_2 - 2\cdot\xi_3 + \xi_4 &= 0, \\ -3\cdot\xi_1 + 5\cdot\xi_2 - 2\cdot\xi_3 - \xi_4 &= 0, \\ -2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_2 + 4\cdot\xi_3 \qquad &= 0, \\ \xi_1 - \xi_2 \qquad + 7\cdot\xi_4 &= 0, \end{aligned}$$

dessen letzte drei Gleichungen linear unabhängig sind. Eine einfache Umformung dieser Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} -3\cdot\xi_1 + 5\cdot\xi_2 - 2\cdot\xi_3 - \xi_4 &= 0, \\ -8\cdot\xi_1 + 8\cdot\xi_2 \qquad - 2\cdot\xi_4 &= 0, \\ \xi_1 - \xi_2 \qquad + 7\cdot\xi_4 &= 0, \end{aligned}$$

und wir erhalten als Lösung $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3,\ \xi_4 = 0$.

Der Vektor

$$\overset{(-3)}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_3$$

ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert -3.

Der zum Eigenwert $+3$ gehörende zweidimensionale Eigenraum $W(3)$ ist der Lösungsraum der homogenen Vektorgleichung

$$(A - 3E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o},$$

der für $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{x}_1 + \xi_2\boldsymbol{x}_2 + \xi_3\boldsymbol{x}_3 + \xi_4\boldsymbol{x}_4$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\xi_1 - 3\cdot\xi_2 - 2\cdot\xi_3 + \xi_4 &= 0, \\ -3\cdot\xi_1 - \xi_2 - 2\cdot\xi_3 - \xi_4 &= 0, \\ -2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_2 - 2\cdot\xi_3 \qquad &= 0, \\ \xi_1 - \xi_2 \qquad + \xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

entspricht. Die letzten beiden Gleichungen sind linear unabhängig, und aus ihnen folgt

$$\xi_1 = \xi_2 - \xi_4, \quad \xi_3 = -2 \cdot \xi_2 + \xi_4.$$

Setzen wir einmal $\xi_2 = 1$, $\xi_4 = 0$ und zum anderen $\xi_2 = 0$, $\xi_4 = 1$, so erhalten wir zwei linear unabhängige Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4,$$

die den Eigenraum $W(3)$ erzeugen. Wenn wir den Vektor $\boldsymbol{x}$ normieren, so ergibt sich

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_3$$

als normierter Eigenvektor zum Eigenwert 3. Wir bestimmen einen Vektor $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \alpha\overset{(3)}{\boldsymbol{x}}$ durch das Orthogonalisierungsverfahren. Es ergibt sich $\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}$, und wenn wir den Vektor $\boldsymbol{y}'$ noch normieren, folgt

$$\overset{(3)}{\boldsymbol{y}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_4.$$

Die Vektoren $\overset{(3)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(3)}{\boldsymbol{y}}$ bilden eine Orthonormalbasis des Eigenraumes $W(3)$.

Für den Eigenwert 6 müssen wir schließlich die homogene Vektorgleichung

$$(A - 6E)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

oder das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-4 \cdot \xi_1 - 3 \cdot \xi_2 - 2 \cdot \xi_3 + \xi_4 &= 0,\\
-3 \cdot \xi_1 - 4 \cdot \xi_2 - 2 \cdot \xi_3 - \xi_4 &= 0,\\
-2 \cdot \xi_1 - 2 \cdot \xi_2 - 5 \cdot \xi_3 &= 0,\\
\xi_1 - \xi_2 - 2 \cdot \xi_4 &= 0
\end{aligned}$$

lösen. Die letzten drei Gleichungen sind linear unabhängig, und eine einfache Umformung ergibt

$$\begin{aligned}
-3 \cdot \xi_1 - 4 \cdot \xi_2 - 2 \cdot \xi_3 - \xi_4 &= 0,\\
-2 \cdot \xi_1 - 2 \cdot \xi_2 - 5 \cdot \xi_3 &= 0,\\
7 \cdot \xi_1 + 7 \cdot \xi_2 + 4 \cdot \xi_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir $\xi_1 = -\xi_2 = \xi_4$, $\xi_3 = 0$. Der Vektor

$$\overset{(6)}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_4$$

ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 6.

Die Vektoren $\overset{(-3)}{\boldsymbol{x}};\ \overset{(3)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(3)}{\boldsymbol{y}};\ \overset{(6)}{\boldsymbol{x}}$ bilden eine Orthonormalbasis des vierdimensionalen euklidischen Vektorraumes $V^{(4)}$, die aus Eigenvektoren des symmetrischen Operators A besteht. In bezug auf diese Orthonormalbasis entspricht dem symmetrischen Operator A die Normalform

$$A^{(n)} = \left\|\begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{matrix}\right\|.$$

Der Übergang von der Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ zu der oben angegebenen Orthonormalbasis von Eigenvektoren des Operators A wird durch die orthogonale Matrix

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$$

beschrieben. Infolgedessen gelten die Matrizengleichungen

$$A^{(\mathfrak{n})} = U^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot U \quad \text{und} \quad A = U \cdot A^{(\mathfrak{n})} \cdot U^{\mathsf{T}}.$$

*Wir betrachten noch einmal die paarweise orthogonalen Eigenräume $W(\lambda_1)$, ..., $W(\lambda_m)$ mit ihren Orthonormalbasen $\overset{(\lambda_1)}{x_1}, \ldots, \overset{(\lambda_1)}{x_{\nu_1}}; \ldots; \overset{(\lambda_m)}{x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x_n}$. Ist $x \in V$ ein beliebiger Vektor und

$$x = \xi_1 \overset{(\lambda_1)}{x_1} + \cdots + \xi_{\nu_1} \overset{(\lambda_1)}{x_{\nu_1}} + \cdots + \xi_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1} \overset{(\lambda_m)}{x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}} + \cdots + \xi_n \overset{(\lambda_m)}{x_n},$$

so ist

$$x^{(1)} = \xi_1 \overset{(\lambda_1)}{x_1} + \cdots + \xi_{\nu_1} \overset{(\lambda_1)}{x_{\nu_1}} \in W(\lambda_1)$$

die Orthogonalprojektion von x auf den Teilraum $W(\lambda_1)$.

Entsprechend sind

$$x^{(2)} = \xi_{\nu_1+1} \overset{(\lambda_2)}{x_{\nu_1+1}} + \cdots + \xi_{\nu_1+\nu_2} \overset{(\lambda_2)}{x_{\nu_1+\nu_2}}, \ldots, x^{(m)} = \xi_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1} \overset{(\lambda_m)}{x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}} + \cdots + \xi_n \overset{(\lambda_m)}{x_n}$$

die Orthogonalprojektionen von x auf die Teilräume $W(\lambda_2)$, ..., $W(\lambda_m)$. Zu jedem Vektor $x \in V$ gibt es also m eindeutig bestimmte paarweise orthogonale Vektoren $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ aus $W(\lambda_1)$, ..., $W(\lambda_m)$, so daß $x = x^{(1)} + \cdots + x^{(m)}$ ist. Wir schreiben dafür auch

$$V = W(\lambda_1) \dotplus \cdots \dotplus W(\lambda_m)$$

und sagen: *Der euklidische Vektorraum V ist die orthogonale direkte Summe der paarweise orthogonalen Eigenräume $W(\lambda_1)$, ..., $W(\lambda_m)$ des symmetrischen Operators A.* Sind $P_1, \ldots, P_m$ die in § 18, Nr. 5 definierten Projektoren von V auf die Eigenräume $W(\lambda_1)$, ..., $W(\lambda_m)$, so gilt

$$x^{(1)} = P_1 x, \ldots, x^{(m)} = P_m x,$$

und für jedes $x \in V$ erhalten wir

$$x = P_1 x + \cdots + P_m x = (P_1 + \cdots + P_m) x$$

oder

$$P_1 + \cdots + P_m = E.$$

Sind x und y beliebige Vektoren aus V und ist $j' \neq j$, so ist $P_{j'} x \in W(\lambda_{j'})$, $P_j y \in W(\lambda_j)$, und da die Eigenräume $W(\lambda_{j'})$ und $W(\lambda_j)$ zueinander orthogonal sind, gilt

$$(P_{j'} x, P_j y) = (P_j P_{j'} x, y) = (x, P_{j'} P_j y) = 0,$$

woraus

$$P_{j'} P_j = P_j P_{j'} = O \quad \text{für} \quad j \neq j'$$

folgt.

Wenden wir den symmetrischen Operator A auf den Vektor $x = x^{(1)} + \cdots + x^{(m)} \in V$ an, so erhalten wir

$$Ax = Ax^{(1)} + \cdots + Ax^{(m)} = \lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_m x^{(m)}$$
$$= \lambda_1(P_1 x) + \cdots + \lambda_m(P_m x) = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m)\, x .$$

Es gilt der folgende *Spektralsatz*:

VII. *Ist A ein symmetrischer Operator auf dem euklidischen Vektorraum V, so gibt es m verschiedene reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und m vom Nulloperator verschiedene Projektoren $P_1, \ldots, P_m$, so daß*

1. $P_{j'}P_j = P_jP_{j'} = O$ *für* $j \neq j'$,
2. $P_1 + \cdots + P_m = E$,
3. $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m = A$

ist. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und die Projektoren $P_1, \ldots, P_m$ sind durch den symmetrischen Operator A als Eigenwerte von A bzw. als Projektoren auf die zugehörigen Eigenräume eindeutig bestimmt.

Es bleibt noch die letzte Aussage des Satzes VII zu beweisen. Ist $x \in V$ ein beliebiger Vektor, so gilt für jedes $i = 1, \ldots, m$

$$(AP_i)\, x = (\lambda_i P_1 P_i + \cdots + \lambda_m P_m P_i)\, x = \lambda_i P_i^2 x = \lambda_i P_i x .$$

Da $P_i \neq O$ vorausgesetzt ist, gibt es einen Vektor $x \in V$, so daß $P_i x \neq o$ ist. Dann ist aber λ_i Eigenwert des Operators A und $P_i x$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. Ist $W(\lambda_i)$ der zu λ_i gehörende Eigenraum, so folgt aus der obigen Gleichung überdies, daß $P_i V \subseteq W(\lambda_i)$ ist. Die Teilräume $P_i V$ sind also als Teilräume der paarweise orthogonalen Eigenräume ebenfalls paarweise orthogonal, und aus der Gleichung

$$x = Ex = (P_1 + \cdots + P_m)\, x = P_1 x + \cdots + P_m x ,$$

die für jedes $x \in V$ gilt, folgt

$$P_1 V + \cdots + P_m V = V.$$

Dann ist aber

$$\dim P_1 V + \cdots + \dim P_m V \geqq \dim (P_1 V + \cdots + P_m V) = n .$$

Andererseits ist $\dim P_i V \leqq \dim W(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, m$ und

$$\dim W(\lambda_1) + \cdots + \dim W(\lambda_m) = n .$$

Hieraus folgt unmittelbar $\dim P_i V = \dim W(\lambda_i)$ oder $P_i V = W(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, m$. Das war die Behauptung. *

4. DIE NORMALFORM SCHIEFSYMMETRISCHER OPERATOREN

Es sei nun $A \in \mathscr{A}(V)$ ein schiefsymmetrischer Operator. Nach § 18, Nr. 2, Satz IX besitzt die charakteristische Funktion $f_A(x)$ höchstens die Zahl 0 als reelle Nullstelle, und wir schreiben

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot x^s \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_t) \cdot (x - \bar{\lambda}_1) \cdots (x - \bar{\lambda}_t). \tag{10}$$

Dabei ist wie früher $s + 2 \cdot t = n$, $s \geqq 0$, und $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$, $\bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ $(1 \leqq j \leqq t;$ $\tau_j \neq 0)$ ist ein Paar nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen von $f_A(x)$.

Ist A vom Nulloperator verschieden, so ist $t \geqq 1$, und es gibt wenigstens ein Paar nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen λ_j, $\bar{\lambda}_j$ $(1 \leqq j \leqq t)$ von $f_A(x)$. Es sei $W = L(\{x, y\})$ der in Nr. 2 bestimmte zweidimensionale bezüglich A invariante Teilraum. Wie im Fall eines symmetrischen Operators A definieren wir einen linearen Operator $A_W \in \mathscr{A}(W)$ durch

$$A_W z \underset{\text{Def.}}{=} Az \quad (z \in W).$$

Sind z_1, z_2 beliebige Vektoren aus W, so gilt

$$(A_W z_1, z_2) = (Az_1, z_2) = -(z_1, Az_2) = -(z_1, A_W z_2),$$

und folglich ist A_W ein schiefsymmetrischer Operator auf dem Teilraum W. Es sei y_1, y_2 eine Orthonormalbasis des Teilraumes W und

$$A_W y_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{21} y_2,$$
$$A_W y_2 = \beta_{12} y_1 + \beta_{22} y_2.$$

Aus der Schiefsymmetrie des Operators A_W folgt die Schiefsymmetrie der ihm zugeordneten Matrix, und es ist

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 0 \quad \text{und} \quad \beta_{12} = -\beta_{21}.$$

Bezeichnen wir β_{21} mit β, so ist

$$A_W y_1 = \beta y_2 \quad \text{und} \quad A_W y_2 = -\beta y_1,$$

und für die charakteristische Funktion des Operators A_W erhalten wir

$$\det(A_W - xE) = \begin{vmatrix} -x & -\beta \\ \beta & -x \end{vmatrix} = x^2 + \beta^2.$$

Andererseits gilt wie im Fall eines symmetrischen Operators A

$$\det(A_W - xE) = x^2 - 2 \cdot \sigma_j \cdot x + (\sigma_j^2 + \tau_j^2),$$

und aus dem Vergleich der beiden letzten Gleichungen folgt $\sigma_j = 0$, $\tau_j = \pm\beta$. Für das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ von $f_A(x)$ ergibt sich $\lambda_j = i\beta$, $\bar{\lambda}_j = -i\beta$ oder $\lambda_j = -i\beta$, $\bar{\lambda}_j = i\beta$.

Wir erhalten den wichtigen Satz

VIII. *Die von 0 verschiedenen Nullstellen der charakteristischen Funktion eines schiefsymmetrischen Operators A sind rein imaginär*:

$$f_A(x) = (-1)^n \cdot x^s \cdot (x - i\beta_1) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_1) \cdots (x + i\beta_t). \tag{11}$$

Dabei sind $\beta_1, \ldots, \beta_t$ o. B. d. A. positive reelle Zahlen.

Ist $s > 0$, so sei $W(0)$ der zum Eigenwert 0 gehörende Eigenraum, dessen Dimension wir mit ν bezeichnen. Da $W(0)$ der Kern des Operators A ist, gilt $\nu = n - r(A)$. Wir

wählen eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\nu$ des Teilraumes $W(0)$ und ergänzen sie durch $\boldsymbol{x}_{\nu+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ von V. Die dem schiefsymmetrischen Operator A in bezug auf diese Basis zugeordnete Matrix erhalten wir aus den Gleichungen

$$A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{o} \qquad (j = 1, \ldots, \nu),$$

$$A\boldsymbol{x}_j = \sum_{j'=1}^{n} \alpha_{j'j}\boldsymbol{x}_{j'} \quad (j = \nu + 1, \ldots, n).$$

Dabei ist

$$\alpha_{j'j} = (\boldsymbol{x}_{j'}, A\boldsymbol{x}_j) = -(A\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{x}_j) = -\alpha_{jj'},$$

und für $j = j'$ sowie $j' = 1, \ldots, \nu$ gilt

$$\alpha_{j'j} = 0.$$

Daraus folgt

$$A\boldsymbol{x}_j = \sum_{j'=\nu+1}^{n} \alpha_{j'j}\boldsymbol{x}_{j'} \quad (j = \nu + 1, \ldots, n), \tag{12}$$

und für die schiefsymmetrische Matrix $A = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A)$ ergibt sich

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{\nu+1,\nu+2} & \ldots & \alpha_{\nu+1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{\nu+2,\nu+1} & 0 & \ldots & \alpha_{\nu+2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,\nu+1} & \alpha_{n,\nu+2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Da $r(A) = n - \nu$ gilt, ist die in der rechten unteren Ecke stehende schiefsymmetrische Matrix

$$A^{(\nu)} = \left\| \begin{matrix} 0 & \alpha_{\nu+1,\nu+2} & \ldots & \alpha_{\nu+1,n} \\ \alpha_{\nu+2,\nu+1} & 0 & \ldots & \alpha_{\nu+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,\nu+1} & \alpha_{n,\nu+2} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

regulär. Andererseits ist

$$f_A(x) = \det_n |A - xE| = (-1)^\nu \cdot x^\nu \cdot \det_{n-\nu} |A^{(\nu)} - xE|$$
$$= (-1)^n \cdot x^s \cdot (x - i\beta_1) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_1) \cdots (x + i\beta_t)$$

und damit

$$(-1)^n \cdot x^{s-\nu} \cdot (x - i\beta_1) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_1) \cdots (x + i\beta_t)$$
$$= (-1)^\nu \cdot \det_{n-\nu} |A^{(\nu)} - xE|.$$

Aus der Regularität der Matrix $A^{(\nu)}$ folgt $\det_{n-\nu} |A^{(\nu)} - 0E| \neq 0$, und folglich muß $s - \nu = 0$ sein. Entsprechend dem Fall eines symmetrischen Operators erhalten wir den Satz

IX. *Ist* 0 *ein Eigenwert des schiefsymmetrischen Operators* $A \in \mathscr{A}(V)$, *so ist die Dimension des zugehörigen Eigenraumes* $W(0)$ *gleich der Vielfachheit der Nullstelle* 0 *in der charakteristischen Funktion* $f_A(x)$.

Aus der Gleichung (12) folgt, daß der Teilraum $W' = L(\{x_{\nu+1}, \ldots, x_n\})$ in bezug auf den schiefsymmetrischen Operator A invariant ist.

Ist $s = \nu = 0$, so setzen wir $W' = V$.

Im folgenden betrachten wir den bezüglich A invarianten Teilraum W'. Durch die Gleichung

$$A'z \underset{\text{Def.}}{=} Az \quad (z \in W')$$

wird ein linearer Operator $A' \in \mathscr{A}(W')$ definiert, von dem man ohne Mühe nachweist, daß er schiefsymmetrisch ist. Es gilt

$$A'x_j = \sum_{j'=\nu+1}^{n} \alpha_{j'j} x_{j'} \quad (j = \nu + 1, \ldots, n),$$

und dem Operator A' entspricht bezüglich der Orthonormalbasis $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ von W' die schiefsymmetrische Matrix $A^{(\nu)}$. Infolgedessen ist

$$f_{A'}(x) = \det_{n-\nu} |A^{(\nu)} - xE| = (-1)^{n-\nu} \cdot (x - i\beta_1) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_1) \cdots (x + i\beta_t), \tag{14}$$

und aus $f_{A'}(0) = \det_{n-\nu} |A^{(\nu)}| \neq 0$ folgt, daß A' ein regulärer schiefsymmetrischer Operator ist. Betrachten wir das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $i\beta_1$, $-i\beta_1$, so gibt es nach den Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts zwei orthogonale, normierte Vektoren y'_1, y'_2, die einen bezüglich A' invarianten zweidimensionalen Teilraum von W' erzeugen und für die $A'y'_1 = \beta_1 y'_2$ und $A'y'_2 = -\beta_1 y'_1$ ist. Die Vektoren y'_1, y'_2 ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}'_0 = \{y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n'}\}$ $(n' = n - \nu)$ von W' und bestimmen die dem schiefsymmetrischen Operator $A' \in \mathscr{A}(W')$ bezüglich dieser Basis zugeordnete Matrix $A' = \Phi_{\mathfrak{B}'_0}(A')$. Es gilt

$$A'y'_1 = \beta_1 y'_2, \quad A'y'_2 = -\beta_1 y'_1, \quad A'y'_j = \sum_{j'=1}^{n'} \alpha'_{j'j} y'_{j'} \quad (j = 3, \ldots, n').$$

Aus den Gleichungen

$$\alpha'_{j'j} = (y'_{j'}, A'y'_j) = -(A'y'_{j'}, y'_j) = -\alpha'_{jj'}$$

erhalten wir für $j = 3, \ldots, n'$

$$\alpha'_{1j} = (y'_1, A'y'_j) = -(A'y'_1, y'_j) = -\beta_1 \cdot (y'_2, y'_j) = 0,$$

$$\alpha'_{2j} = (y'_2, A'y'_j) = -(A'y'_2, y'_j) = \beta_1 \cdot (y'_1, y'_j) = 0$$

und damit

$$A'y_j' = \sum_{j'=3}^{n'} \alpha'_{j'j} y'_{j'} \quad (j = 3, \ldots, n'). \tag{15}$$

Die Matrix A' hat also die Form

$$A' = \begin{Vmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha'_{34} & \ldots & \alpha'_{3n'} \\ 0 & 0 & \alpha'_{43} & 0 & \ldots & \alpha'_{4n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha'_{n'3} & \alpha'_{n'4} & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Die Gleichung (15) besagt ferner, daß der Teilraum

$$W'' = L(\{y_3, \ldots, y_{n'}\})$$

in bezug auf den schiefsymmetrischen Operator A' invariant ist. Definieren wir auf diesem Teilraum einen schiefsymmetrischen Operator A'' durch die Gleichung

$$A''z \underset{\text{Def.}}{=} A'z \quad (z \in W''),$$

so entspricht dem Operator A'' in bezug auf die Orthonormalbasis $y_3, \ldots, y_{n'}$ die in der rechten unteren Ecke der Matrix A' stehende Teilmatrix

$$A'^{(2)} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha'_{34} & \ldots & \alpha'_{3n'} \\ \alpha'_{43} & 0 & \ldots & \alpha'_{4n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{n'3} & \alpha'_{n'4} & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Berechnen wir die charakteristische Funktion der Operatoren A' bzw. A'', so gilt

$$f_{A'}(x) = \det_{n'} |A' - xE| = \begin{vmatrix} -x & -\beta_1 \\ \beta_1 & -x \end{vmatrix} \cdot \det_{n'-2} |A'^{(2)} - xE|$$

oder

$$f_{A'}(x) = (x^2 + \beta_1^2) \cdot f_{A''}(x).$$

Dann ist aber nach (14)

$$f_{A''}(x) = (-1)^{n'-2} \cdot (x - i\beta_2) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_2) \cdots (x + i\beta_t),$$

und wir können auf den Operator A'' und das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $i\beta_2$, $-i\beta_2$ von $f_{A''}(x)$ die gleichen Überlegungen anwenden wie auf den Operator A' und das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $i\beta_1$, $-i\beta_1$. Wir erhalten zwei orthogonale normierte Vektoren y_1'', y_2'' aus W'', die wir zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0'' = \{y_1'', y_2'', \ldots, y_{n''}''\}$ $(n'' = n - \nu - 2)$ von W'' ergänzen können, so daß die dem schiefsymmetrischen Operator A'' zugeordnete schiefsymmetrische Matrix

$A'' = \Phi_{\mathfrak{B}_0''}(A'')$ die Form

$$A'' = \begin{Vmatrix} 0 & -\beta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha''_{34} & \dots & \alpha''_{3n''} \\ 0 & 0 & \alpha''_{43} & 0 & \dots & \alpha''_{4n''} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha''_{n''3} & \alpha''_{n''4} & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

besitzt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Nach t Schritten erhält man t Paare orthogonaler normierter Vektoren $y'_1, y'_2; y''_1, y''_2; \dots; y_1^{(t)}, y_2^{(t)}$. Ergänzt man diese $2 \cdot t$ normierten Vektoren durch eine Orthonormalbasis $x_1, \dots, x_s$ von $W(0)$, so erhält man $s + 2 \cdot t = n$ normierte Vektoren

$$x_1, \dots, x_s; y'_1, y'_2; y''_1, y''_2; \dots; y_1^{(t)}, y_2^{(t)} \tag{17}$$

des euklidischen Vektorraumes V. Wir wollen zeigen, daß diese Vektoren eine Orthonormalbasis von V bilden. Zunächst ist nach Definition von $x_1, \dots, x_s$

$$(x_{j'}, x_j) = 0 \quad \text{für} \quad j' \neq j.$$

Die Vektoren $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}$ sind aus $W' = L(\{x_{s+1}, \dots, x_n\})$, und da W' eine zu allen Vektoren aus $W(0)$ orthogonale Basis besitzt, ist W' orthogonal zu $W(0)$. Infolgedessen gilt $(x_j, y_1^{(k)}) = (x_j, y_2^{(k)}) = 0$ für $j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t$. Ferner ist wiederum nach Definition $(y'_1, y'_2) = 0$ und $y_1^{(k)}, y_2^{(k)} \in W'' = L(\{y'_3, \dots, y'_n\})$ für $k = 2, \dots, t$. Da W'' eine zu allen Vektoren aus $L(\{y'_1, y'_2\})$ orthogonale Basis besitzt, ist W'' zu $L(\{y'_1, y'_2\})$ orthogonal, und es gilt $(y'_1, y_1^{(k)}) = (y'_2, y_1^{(k)}) = (y'_1, y_2^{(k)}) = (y'_2, y_2^{(k)}) = 0$ für $k = 2, \dots, t$. In diesen Überlegungen fortfahrend, erhalten wir:

Die Vektoren (17) *bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraumes* V.

Berechnen wir die Matrix $A^{(n)}$, die dem gegebenen schiefsymmetrischen Operator A in bezug auf diese Basis entspricht, so gilt

$$Ax_j = o \qquad (j = 1, \dots, s),$$
$$Ay_1^{(k)} = \beta_k y_2^{(k)}, \quad Ay_2^{(k)} = -\beta_k y_1^{(k)} \quad (k = 1, \dots, t),$$

und wir erhalten

$$A^{(n)} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_t & 0 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

X. *Ist* $A \in \mathscr{A}(V)$ *ein schiefsymmetrischer Operator, so gibt es eine Orthonormalbasis* $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ *des euklidischen Vektorraumes* V, *so daß dem Operator* A *in bezug auf diese Orthonormalbasis die Matrix* $A^{(n)}$ *zugeordnet ist.*

Die Matrix $A^{(n)}$ nennen wir die *Normalform des schiefsymmetrischen Operators* A.

Ordnen wir die positiven reellen Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nach ihrer Größe,

$$0 < \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \cdots \leqq \beta_n,$$

so ist die Matrix $A^{(n)}$ durch den schiefsymmetrischen Operator A eindeutig bestimmt.

Ist A eine beliebige schiefsymmetrische Matrix und $A \in \mathscr{A}(V)$ der schiefsymmetrische Operator von V, dem die Matrix A bei einer festen Orthonormalbasis entspricht, so erhalten wir durch Übergang zu einer ausgezeichneten Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ unter Berücksichtigung von § 18, Nr. 4, Satz XVII:

XI. *Zu jeder schiefsymmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix U, so daß*

$$A = U \cdot A^{(n)} \cdot U^{\mathrm{T}} \quad \textit{und} \quad A^{(n)} = U^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot U$$

ist. Dabei ist $A^{(n)}$ die durch die Gleichung (18) *gegebene Matrix. Die rein imaginären Zahlen $i\beta_k$, $-i\beta_k$ $(k = 1, \ldots, t)$ bezeichnen die Paare nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen der charakteristischen Funktion der Matrix A.*

Die Matrix $A^{(n)}$ wird die *euklidische Normalform der schiefsymmetrischen Matrix* A genannt.

2°. Als Beispiel betrachten wir wiederum den vierdimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(4)}$. Der schiefsymmetrische Operator A sei durch seine Matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{matrix} \right\|$$

in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ von $V^{(4)}$ gegeben. Wir berechnen

$$\begin{vmatrix} x & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & x & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & x & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & x & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x \end{vmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ x & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x \end{vmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ x & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & x & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot (x^3 + x) + \frac{1}{9} \cdot (x^2 + 1) + \frac{4}{9} \cdot (x^2 + 1) + \frac{4}{9} \cdot (x^2 + 1) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1.$$

Es ist also

$$f_A(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 = (x - i)^2 \cdot (x + i)^2 .$$

Es ist $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Wir setzen $\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2 + \xi_3 \boldsymbol{x}_3 + \xi_4 \boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{y} = \xi_5 \boldsymbol{x}_1 + \xi_6 \boldsymbol{x}_2 + \xi_7 \boldsymbol{x}_3 + \xi_8 \boldsymbol{x}_4$ und erhalten aus den beiden Gleichungen

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \quad \text{und} \quad A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{3} \cdot \xi_2 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_3 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_4 + \xi_5 &= 0, \\
\tfrac{1}{3} \cdot \xi_1 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_3 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_4 + \xi_6 &= 0, \\
\tfrac{2}{3} \cdot \xi_1 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_2 - \tfrac{1}{3} \cdot \xi_4 + \xi_7 &= 0, \\
-\tfrac{2}{3} \cdot \xi_1 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_2 + \tfrac{1}{3} \cdot \xi_3 + \xi_8 &= 0, \\
-\xi_1 - \tfrac{1}{3} \cdot \xi_6 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_7 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_8 &= 0, \\
-\xi_2 + \tfrac{1}{3} \cdot \xi_5 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_7 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_8 &= 0, \\
-\xi_3 + \tfrac{2}{3} \cdot \xi_5 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_6 - \tfrac{1}{3} \cdot \xi_8 &= 0, \\
-\xi_4 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_5 - \tfrac{2}{3} \cdot \xi_6 + \tfrac{1}{3} \cdot \xi_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten zwei Lösungen dieses linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$\xi_1 = \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \xi_4 = 0; \quad \xi_5 = +\frac{1}{3}, \quad \xi_6 = -\frac{1}{3}, \quad \xi_7 = 0, \quad \xi_8 = \frac{4}{3},$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = 0, \quad \xi_3 = 1; \quad \xi_5 = \frac{2}{3}, \quad \xi_6 = -\frac{2}{3}, \quad \xi_7 = 0, \quad \xi_8 = -\frac{1}{3}$$

setzen. Die Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{y} = \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_2 + \frac{4}{3}\boldsymbol{x}_4,$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_3, \quad \boldsymbol{y}' = \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_4$$

sind paarweise orthogonal, und es gilt

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}, \quad A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}; \quad A\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{o}, \quad A\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}.$$

Normieren wir die Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$, so erhalten wir eine neue Orthonormalbasis des Vektorraumes $V^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}_2, \\
\overset{(1)}{\boldsymbol{y}} &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}\boldsymbol{x}_1 - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}\boldsymbol{x}_2 + \frac{4}{3 \cdot \sqrt{2}}\boldsymbol{x}_4, \\
\overset{(1)}{\boldsymbol{x}'} &= \boldsymbol{x}_3, \\
\overset{(1)}{\boldsymbol{y}'} &= \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{x}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_4 .
\end{aligned}$$

Dem schiefsymmetrischen Operator A entspricht in bezug auf die neue Orthonormalbasis die Normalform

$$A^{(n)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Der Übergang von der alten Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0$ zur neuen Orthonormalbasis wird durch die orthogonale Matrix

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3\cdot\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

beschrieben, und es gelten die Matrizengleichungen

$$A^{(n)} = U^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot U \quad \text{und} \quad A = U \cdot A^{(n)} \cdot U^{\mathsf{T}}.$$

5. DIE NORMALFORM ORTHOGONALER OPERATOREN; DER SATZ VON EULER-D'ALEMBERT

Wir betrachten schließlich einen orthogonalen Operator $U \in \mathscr{A}(V)$. Nach § 18, Nr. 2, Satz VIII besitzt die charakteristische Funktion $f_U(x)$ höchstens die Zahlen $+1$ und -1 als reelle Nullstellen. Infolgedessen können wir $f_U(x)$ in folgender Form schreiben:

$$f_U(x) = (-1)^n \cdot (x-1)^{s_1} \cdot (x+1)^{s_2} \cdot (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_t) \cdot (x-\bar{\lambda}_1) \cdots (x-\bar{\lambda}_t). \quad (19)$$

Dabei ist $s_1 + s_2 = s$, $s_1 \geqq 0$, $s_2 \geqq 0$ und wie früher $s + 2 \cdot t = n$.

Ist $t \geqq 1$, so gibt es wenigstens ein Paar nicht reeller konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$, $\bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ von $f_U(x)$. Ist $W = L(\{x, y\})$ der in Nr. 2 bestimmte zweidimensionale bezüglich U invariante Teilraum von V, so definieren wir einen linearen Operator $U_W \in \mathscr{A}(W)$ durch die Gleichung

$$U_W z \underset{\text{Def.}}{=} Uz \quad (z \in W).$$

Sind z_1, z_2 beliebige Vektoren aus W, so gilt $(U_W z_1, U_W z_2) = (Uz_1, Uz_2) = (z_1, z_2)$, und folglich ist U_W ein orthogonaler Operator auf dem zweidimensionalen euklidischen Teilraum W. Ist y_1, y_2 eine Orthonormalbasis von W, so gibt es nach § 15, Nr. 2, Satz II einen Winkel φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$, so daß

$$U_W y_1 = \cos\varphi y_1 + \sin\varphi y_2, \quad U_W y_2 = -\sin\varphi y_1 + \cos\varphi y_2$$

oder

$$U_W y_1 = \cos\varphi y_1 + \sin\varphi y_2, \quad U_W y_2 = \sin\varphi y_1 - \cos\varphi y_2$$

ist. Für die charakteristische Funktion des Operators U_W erhalten wir

$$\det(U_W - xE) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - x & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - x \end{vmatrix} = x^2 - 2\cdot\cos\varphi\cdot x + 1$$

oder

$$\det(U_W - xE) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - x & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - x \end{vmatrix} = x^2 - 1.$$

Andererseits ist wie im Fall eines symmetrischen Operators

$$\det(U_W - xE) = x^2 - 2\cdot\sigma_j\cdot x + (\sigma_j^2 + \tau_j^2).$$

Ein Vergleich der letzten Gleichung mit den beiden vorhergehenden Gleichungen lehrt, daß im ersten Fall

$$\sigma_j = \cos\varphi,\quad \tau_j = \sin\varphi \quad \text{oder} \quad \sigma_j = \cos\varphi,\quad \tau_j = -\sin\varphi$$

ist, während der zweite Fall nicht eintreten kann.

Da $\tau_j \neq 0$ ist, folgt $0 < \varphi < 2\pi$, und wir erhalten den Satz

XII. *Jedem Paar konjugiert komplexer Nullstellen der charakteristischen Funktion eines orthogonalen Operators U entspricht ein Winkel φ: $0 \leqq \varphi < 2\pi$, so daß die Nullstellen in der Form*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi,\quad \cos\varphi - i\sin\varphi$$

geschrieben werden können.

Alle Nullstellen der charakteristischen Funktion eines orthogonalen Operators U besitzen den Absolutbetrag 1.

Es sei

$$f_U(x) = (-1)^n\cdot(x-1)^{s_1}\cdot(x+1)^{s_2}\cdot(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_t)\cdot(x-\bar\lambda_1)\cdots(x-\bar\lambda_t),$$

$$\lambda_j = \cos\varphi_j + i\sin\varphi_j,\quad \bar\lambda_j = \cos\varphi_j - i\sin\varphi_j$$

und

$$0 < \varphi_j < 2\pi \quad (j = 1, \ldots, t).$$

Sind $s_1 > 0$ und $s_2 > 0$, so sei $W(1)$ der zum Eigenwert 1 gehörende Eigenraum, dessen Dimension wir mit ν_1 bezeichnen, und $W(-1)$ der zum Eigenwert -1 gehörende Teilraum, dessen Dimension wir mit ν_2 bezeichnen. Nach § 18, Nr. 2, Satz VIII sind die Eigenräume $W(1)$ und $W(-1)$ zueinander orthogonal, und für ihre Dimensionen gelten die Gleichungen $\nu_1 = n - r(U - E)$ und $\nu_2 = n - r(U + E)$. Wir wählen eine Orthonormalbasis $x_1, \ldots, x_{\nu_1}$ von $W(1)$ und eine Orthonormalbasis $x_{\nu_1+1}, \ldots, x_{\nu_1+\nu_2}$ von $W(-1)$. Dann ist

$$(x_j, x_{j'}) = 0 \quad (j = 1, \ldots, \nu_1;\ j' = \nu_1 + 1, \ldots, \nu_1 + \nu_2),$$

und die Vektoren $x_1, \ldots, x_\nu$ $(\nu = \nu_1 + \nu_2)$ bilden ein Orthonormalsystem von Vektoren aus V, das wir zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ergänzen

können. Die dem orthogonalen Operator $\boldsymbol{U}$ in bezug auf diese Orthonormalbasis zugeordnete Matrix U erhalten wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j &= \boldsymbol{x}_j && (j = 1, \dots, \nu_1),\\
\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j &= -\boldsymbol{x}_j && (j = \nu_1 + 1, \dots, \nu = \nu_1 + \nu_2),\\
\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j &= \sum_{j'=1}^{n} v_{j'j}\boldsymbol{x}_{j'} && (j = \nu + 1, \dots, n).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$v_{j'j} = (\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j) = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j) = (\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{x}_j) = 0 \quad (j' = 1, \dots, \nu_1,\ j = \nu_1 + 1, \dots, n),$$

$$v_{j'j} = (\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j) = -(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j) = -(\boldsymbol{x}_{j'}, \boldsymbol{x}_j) = 0 \quad (j' = \nu_1 + 1, \dots, \nu;\ j = \nu + 1, \dots, n).$$

Es gilt also

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_j = \sum_{j'=\nu+1}^{n} v_{j'j}\boldsymbol{x}_{j'} \quad (j = \nu + 1, \dots, n), \tag{20}$$

und für die orthogonale Matrix $U = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(\boldsymbol{U})$ ergibt sich

$$U = \left\|\begin{matrix}
\overbrace{1 & \dots & 0}^{\nu_1} & \overbrace{0 & \dots & 0}^{\nu_2} & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & v_{\nu+1,\nu+1} & \dots & v_{\nu+1,n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & v_{n,\nu+1} & \dots & v_{nn}
\end{matrix}\right\|. \tag{21}$$

Bezeichnen wir die in der rechten unteren Ecke stehende orthogonale Teilmatrix mit $U^{(\nu)}$, so ist

$$U^{(\nu)} = \left\|\begin{matrix} v_{\nu+1,\nu+1} & \dots & v_{\nu+1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ v_{n,\nu+1} & \dots & v_{nn}\end{matrix}\right\|,$$

und für die charakteristische Funktion $f_U(x)$ folgt

$$f_U(x) = (-1)^{\nu} \cdot (x - 1)^{\nu_1} \cdot (x + 1)^{\nu_2} \cdot \det_{n-\nu} |U^{(\nu)} - xE|.$$

Aus dem Vergleich mit (19) erhalten wir zunächst $\nu_1 \leqq s_1$ und $\nu_2 \leqq s_2$ sowie

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \cdot (x - 1)^{s_1 - \nu_1} \cdot (x + 1)^{s_2 - \nu_2} \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_t) \cdot (x - \bar{\lambda}_1) \cdots (x - \bar{\lambda}_t)\\
&= (-1)^{\nu} \cdot \det_{n-\nu} |U^{(\nu)} - xE|.
\end{aligned}$$

Da $r(U - E) = n - \nu_1$ und $r(U + E) = n - \nu_2$ ist, folgt aus der Gleichung (21) für die Matrix U

$$\det_{n-\nu} |U^{(\nu)} - 1E| \neq 0 \quad \text{und} \quad \det_{n-\nu} |U^{(\nu)} - (-1)E| \neq 0.$$

Infolgedessen muß $s_1 - \nu_1 = s_2 - \nu_2 = 0$ sein.

Ist $s_1 = 0$ oder $s_2 = 0$, so ist entsprechend $\nu_1 = 0$ oder $\nu_2 = 0$ zu setzen.

Für die Eigenräume eines orthogonalen Operators gilt:

XIII. *Ist* 1 *oder* -1 *ein Eigenwert des orthogonalen Operators* $U \in \mathscr{A}(V)$, *so ist die Dimension des zugehörigen Eigenraumes* $W(1)$ *bzw.* $W(-1)$ *gleich der Vielfachheit der Nullstelle* 1 *bzw.* -1 *in der charakteristischen Funktion* $f_U(x)$.

Aus der Gleichung (20) folgt, daß der Teilraum $W' = L(\{x_{\nu+1}, \ldots, x_n\})$ in bezug auf den orthogonalen Operator U invariant ist.

Ist $s = s_1 + s_2 = \nu_1 + \nu_2 = \nu = 0$, so setzen wir $W' = V$.

Im folgenden betrachten wir den bezüglich U invarianten Teilraum W'. Durch die Gleichung

$$U'z \underset{\text{Def.}}{=} Uz \quad (z \in W')$$

definieren wir eine Abbildung U' von W' in sich, von der man ohne Mühe nachweist, daß sie linear und orthogonal ist: $U' \in \mathscr{A}(W')$. Es gilt

$$U'x_j = \sum_{j'=\nu+1}^{n} v_{j'j} x_{j'} \quad (j = \nu + 1, \ldots, n),$$

und dem Operator U' entspricht bezüglich der Orthonormalbasis $\{x_{\nu+1}, \ldots, x_n\}$ von W' die orthogonale Matrix $U^{(\nu)}$. Infolgedessen ist

$$f_{U'}(x) = \det_{n-\nu} |U^{(\nu)} - xE| = (-1)^{n-\nu} \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_t) \cdot (x - \bar{\lambda}_1) \cdots (x - \bar{\lambda}_t) \quad (22)$$

mit
$$\lambda_j = \cos \varphi_j + i \sin \varphi_j, \quad \bar{\lambda}_j = \cos \varphi_j - i \sin \varphi_j$$
und
$$0 < \varphi_j < 2\pi \quad (j = 1, \ldots, t).$$

Betrachten wir das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$, so gibt es nach den Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts zwei orthogonale, normierte Vektoren y'_1, y'_2, die einen bezüglich U' invarianten zweidimensionalen Teilraum von W' erzeugen und für die

$$U'y'_1 = \cos \varphi_1 y'_1 + \sin \varphi_1 y'_2,$$

$$U'y'_2 = -\sin \varphi_1 y'_1 + \cos \varphi_1 y'_2$$

gilt. Die Vektoren y'_1, y'_2 ergänzen wir nun zu einer neuen Orthonormalbasis $\mathfrak{B}'_1 = \{y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n'}\}$ $(n' = n - \nu)$ von W' und bestimmen die dem orthogo-

nalen Operator $U' \in \mathscr{A}(W')$ bezüglich dieser Basis zugeordnete Matrix $U' = \Phi_{\mathfrak{B}_0'}(U')$. Es ist

$$U'y_1' = \cos\varphi_1 y_1' + \sin\varphi_1 y_2', \quad U'y_2' = -\sin\varphi_1 y_1' + \cos\varphi_1 y_2'$$

$$U'y_j' = \sum_{j'=1}^{n'} v'_{j'j} y'_{j'} \quad (j = 3, \ldots, n').$$

Aus den Gleichungen

$$\cos\varphi_1 \cdot v'_{1j} + \sin\varphi_1 \cdot v'_{2j} = \cos\varphi_1 \cdot (y_1', U'y_j') + \sin\varphi_1 \cdot (y_2', U'y_j')$$
$$= (U'y_1', U'y_j') = 0,$$

$$-\sin\varphi_1 \cdot v'_{1j} + \cos\varphi_1 \cdot v'_{2j} = -\sin\varphi_1 \cdot (y_1', U'y_j') + \cos\varphi_1 \cdot (y_2', U'y_j')$$
$$= (U'y_2', U'y_j') = 0$$

für $j = 3, \ldots, n'$ folgt, daß v'_{1j}, v'_{2j} als Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit der regulären Koeffizientenmatrix

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{Vmatrix}$$

gleich Null sind, und wir erhalten

$$U'y_j' = \sum_{j'=3}^{n'} v'_{j'j} y'_{j'} \quad (j = 3, \ldots, n'). \tag{23}$$

Die Matrix U' hat also die Form

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & v'_{33} & \ldots & v'_{3n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & v'_{n'3} & \ldots & v'_{n'n'} \end{Vmatrix}. \tag{24}$$

Die Gleichung (23) besagt ferner, daß der Teilraum

$$W'' = L(\{y_3', \ldots, y_{n'}'\})$$

in bezug auf den orthogonalen Operator U' invariant ist. Definieren wir auf diesem Teilraum einen orthogonalen Operator U'' durch die Gleichung

$$U''z \underset{\text{Def.}}{=} U'z \quad (z \in W''),$$

so entspricht dem Operator U'' in bezug auf die Orthonormalbasis $y_3', \ldots, y_{n'}'$ die in der rechten unteren Ecke der Matrix U' stehende Teilmatrix

$$U'^{(2)} = \begin{Vmatrix} v_{33} & \ldots & v_{3n'} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n'3} & \ldots & v_{n'n'} \end{Vmatrix}.$$

Berechnen wir die charakteristische Funktion der Operatoren U' bzw. U'', so gilt

$$f_{U'}(x) = \det_{n'} |U' - xE| = \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 - x & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 - x \end{vmatrix} \cdot \det_{n'-2} |U'^{(2)} - xE|$$

oder

$$f_{U'}(x) = (x - \lambda_1)\cdot(x - \bar{\lambda}_1)\cdot f_{U''}(x).$$

Dann ist aber nach (22)

$$f_{U''}(x) = (-1)^{n'-2}\cdot(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_t)\cdot(x - \bar{\lambda}_2)\cdots(x - \bar{\lambda}_t),$$

und wir können auf den Operator U'' und das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ von $f_{U''}(x)$ die gleichen Überlegungen anwenden wie auf den Operator U' und das Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$. Wir erhalten zwei orthogonale normierte Vektoren y_1'', y_2'' aus W'', die wir zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0'' = \{y_1'', y_2'', \ldots, y_{n''}''\}$ $(n'' = n - \nu - 2)$ von W'' ergänzen können, so daß die dem orthogonalen Operator U'' zugeordnete orthogonale Matrix $U'' = \Phi_{\mathfrak{B}_0''}(U'')$ die Form

$$U'' = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & v_{33}'' & \ldots & v_{3n''}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & v_{n''3}'' & \ldots & v_{n''n''}'' \end{Vmatrix}$$

besitzt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Nach t Schritten erhält man t Paare orthogonaler normierter Vektoren $y_1', y_2'; y_1'', y_2''; \ldots; y_1^{(t)}, y_2^{(t)}$. Ergänzt man diese $2\cdot t$ normierten Vektoren durch die Orthonormalbasis $x_1, \ldots, x_{s_1}$ von $W(1)$ und $x_{s_1+1}, \ldots, x_s$ von $W(-1)$, so erhält man $s + 2\cdot t = n$ normierte Vektoren

$$x_1, \ldots, x_s;\ y_1', y_2';\ y_1'', y_2'';\ \ldots;\ y_1^{(t)}, y_2^{(t)} \tag{25}$$

des euklidischen Vektorraumes V. Wie im Fall eines schiefsymmetrischen Operators zeigt man, daß diese Vektoren eine Orthonormalbasis von V bilden.

Berechnen wir die Matrix $U^{(n)}$, die dem gegebenen orthogonalen Operator U in bezug auf die Basis (25) entspricht, so gilt

$$Ux_j = x_j \qquad (j = 1, \ldots, s_1),$$

$$Ux_j = -x_j \qquad (j = s_1 + 1, \ldots, s),$$

$$Uy_1^{(k)} = \cos\varphi_k y_1^{(k)} + \sin\varphi_k y_2^{(k)},$$

$$Uy_2^{(k)} = -\sin\varphi_k y_1^{(k)} + \cos\varphi_k y_2^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, t),$$

und wir erhalten

$$U^{(n)} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ \underbrace{0 \;\dots\; 0}_{s_1} & & & \underbrace{0 \;\dots\; 0}_{s_2} & & & 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{matrix} \right\|. \qquad (26)$$

XIV. *Ist $U \in \mathscr{A}(V)$ ein orthogonaler Operator, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ des euklidischen Vektorraumes V, so daß dem Operator U in bezug auf diese Orthonormalbasis die Matrix $U^{(n)}$ zugeordnet ist.*

Die Matrix $U^{(n)}$ heißt die *Normalform des orthogonalen Operators U.*

Ordnen wir die Winkel $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ nach der Größe, $0 < \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \dots \leqq \varphi_t < 2\pi$, so ist die Matrix $U^{(n)}$ durch den orthogonalen Operator U eindeutig bestimmt.

Ist U eine beliebige orthogonale Matrix und $U \in \mathscr{A}(V)$ der orthogonale Operator von V, dem die Matrix U bei einer festen Orthonormalbasis entspricht, so erhalten wir durch Übergang zu einer ausgezeichneten Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ unter Berücksichtigung von § 18, Nr. 4, Satz XVII:

XV. *Zu jeder orthogonalen Matrix U gibt es eine orthogonale Matrix U_1, so daß*

$$U = U_1 \cdot U^{(n)} \cdot U_1^{\mathsf{T}} \quad \textit{und} \quad U^{(n)} = U_1^{\mathsf{T}} \cdot U \cdot U_1$$

ist. Dabei ist $U^{(n)}$ die durch die Gleichung (26) *gegebene Matrix. Die komplexen Zahlen* $\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k$, $\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k$ *bezeichnen die Paare konjugiert komplexer Nullstellen der charakteristischen Funktion der Matrix U.*

Die Matrix $U^{(n)}$ wird die *Normalform der orthogonalen Matrix U* genannt.

3°. Es sei wiederum $V^{(4)}$ der vierdimensionale euklidische Vektorraum. Wir betrachten den eigentlich orthogonalen Operator U_+, der durch die Matrix

$$U_+ = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\|$$

in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bestimmt ist. Es gilt

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - x \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - x \end{vmatrix}$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - x \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - x & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - x \end{vmatrix} = (x^2 - 1)^2$$

oder

$$f_{U_+}(x) = (x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2.$$

Der Operator U besitzt die Eigenwerte $-1, +1$, und die zueinander orthogonalen Eigenräume $W(-1)$ und $W(1)$ sind zweidimensional.

Der Gleichung

$$(\boldsymbol{U}_+ + \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

entspricht das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2}) \cdot \xi_1 \quad + \quad \xi_3 \quad &= 0, \\ (-1 + \sqrt{2}) \cdot \xi_2 \quad + \quad \xi_4 &= 0, \\ \xi_1 \quad + (-1 + \sqrt{2}) \cdot \xi_3 \quad &= 0, \\ \xi_2 \quad + (1 + \sqrt{2}) \cdot \xi_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind linear unabhängig, und es gilt

$$\xi_1 = (1 - \sqrt{2}) \cdot \xi_3, \quad \xi_2 = -(1 + \sqrt{2}) \cdot \xi_4.$$

Für $\xi_3 = 1, \xi_4 = 0$ bzw. $\xi_3 = 0, \xi_4 = -1$ erhalten wir die Eigenvektoren zum Eigenwert -1:

$$\boldsymbol{x} = (1 - \sqrt{2})\,\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3, \quad \boldsymbol{y} = (1 + \sqrt{2})\,\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4,$$

die offenbar zueinander orthogonal sind und den Eigenraum $W(-1)$ erzeugen. Wenn wir normieren, ergibt sich

$$\overset{(-1)}{\boldsymbol{x}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{2}}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{4 - 2 \cdot \sqrt{2}}}\,x_3, \quad \overset{(-1)}{\boldsymbol{y}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}}}\,x_2 - \frac{1}{\sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}}}\,x_4.$$

Entsprechend berechnet man die Vektoren

$$\overset{(1)}{x} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}}\,x_3, \qquad \overset{(1)}{y} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\cdot\sqrt{2}}}\,x_2 - \frac{1}{\sqrt{4-2\cdot\sqrt{2}}}\,x_4$$

als Orthonormalbasis des Eigenraumes $W(1)$. Die Vektoren $\overset{(-1)}{x}, \overset{(-1)}{y}; \overset{(1)}{x}, \overset{(1)}{y}$ bilden eine Orthonormalbasis von $V^{(4)}$, in bezug auf die der eigentlich orthogonale Operator U_+ die Normalform

$$U_+^{(n)} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

besitzt.

Wir behandeln schließlich noch die Frage nach der Normalform eines eigentlich orthogonalen Operators. Der orthogonale Operator $U \in \mathscr{A}(V)$ ist dann und nur dann ein eigentlich orthogonaler Operator, wenn $\det U = \det |U^{(n)}| = 1$ ist. Berechnen wir $\det |U^{(n)}|$, so gilt

$$\det |U^{(n)}| = (-1)^{s_2} \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{vmatrix}$$

$$= (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{vmatrix}.$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\varphi_t & -\sin\varphi_t \\ 0 & 0 & \dots & \sin\varphi_t & \cos\varphi_t \end{vmatrix} = 1$$

und damit

$$\det |U^{(n)}| = (-1)^{s_2}.$$

XVI. *Der orthogonale Operator U ist dann und nur dann eigentlich orthogonal, wenn -1 kein Eigenwert von U ist oder die Dimension des Eigenraumes $W(-1)$ gerade ist.*

Ist V ein euklidischer Vektorraum ungerader Dimension $n = 2 \cdot m + 1$ und U ein eigentlich orthogonaler Operator auf V, so besitzt $f_U(x)$ nach Satz II eine reelle Nullstelle. Infolgedessen ist $s = s_1 + s_2 > 0$, und aus $s + 2 \cdot t = 2 \cdot m + 1 = n$ folgt, daß s eine ungerade Zahl ist. Da wir U als eigentlich orthogonalen Operator angenommen hatten, ist nach dem eben bewiesenen Satz s_2 eine gerade Zahl oder Null, und folglich ist $s_1 \geqq 1$ eine ungerade Zahl. Wir erhalten die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von EULER-D'ALEMBERT:

XVII. *In einem euklidischen Vektorraum ungerader Dimension besitzt jeder eigentlich orthogonale Operator einen Fixvektor.*

4°. Wir betrachten den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum und denken uns die Vektoren des dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes $\mathfrak{V}^{(3)}$ durch in einem festen Punkt P angetragene gerichtete Strecken repräsentiert. Dann entspricht jedem eigentlich orthogonalen Operator U eine Drehung um den Punkt P. Wenden wir den Satz XVII an, so ergibt sich die Existenz eines Fixvektors $\mathfrak{x}$: $U\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$. In unserer geometrischen Veranschaulichung bedeutet dies, daß die durch den Vektor $\mathfrak{x}$ bestimmte Gerade durch den Punkt P bei der Drehung U fest bleibt, und wir erhalten den Satz von EULER-D'ALEMBERT: *Jede Drehung des dreidimensionalen Raumes um einen Punkt ist eine Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Gerade.*

6. AUFGABEN

1. Die symmetrischen linearen Operatoren auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V bilden einen $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$-dimensionalen linearen Vektorraum.

1'. Die symmetrischen n-reihigen quadratischen Matrizen bilden einen $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$-dimensionalen linearen Vektorraum.

2. Die schiefsymmetrischen linearen Operatoren auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V bilden einen $\dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$-dimensionalen linearen Vektorraum.

2'. Die schiefsymmetrischen n-reihigen quadratischen Matrizen bilden einen $\dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$-dimensionalen linearen Vektorraum.

3. Ist A ein regulärer symmetrischer Operator auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so ist A^k für jede ganze Zahl k ein ebenfalls regulärer symmetrischer Operator auf dem Vektorraum V mit den Eigenwerten $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k$. Was ergibt sich hieraus für eine Beziehung zwischen den Normalformen der Operatoren A und A^k?

4. Ist A ein regulärer schiefsymmetrischer Operator auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so ist $n = 2 \cdot t$ und

$$f_A(x) = (x - i\beta_1) \cdots (x - i\beta_t) \cdot (x + i\beta_1) \cdots (x + i\beta_t)$$

mit $0 < \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_t$. Für jede ungerade ganze Zahl $k \neq 0$ ist A^k ebenfalls ein regulärer schiefsymmetrischer Operator, und es gilt

$$f_{A^k}(x) = (x - i\beta_1^k) \cdots (x - i\beta_t^k) \cdot (x + i\beta_1^k) \cdots (x + i\beta_t^k).$$

Für jede gerade ganze Zahl k ist A^k ein regulärer symmetrischer Operator mit den reellen Eigenwerten $(i\beta_1)^k, \ldots, (i\beta_t)^k$. Was läßt sich über die Normalform der regulären Operatoren A^k aussagen?

5. Ist U ein orthogonaler Operator auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und

$$f_U(x) = (-1)^n \cdot (x-1)^{s_1} \cdot (x+1)^{s_2} \cdot (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_t) \cdot (x - \bar{\lambda}_1) \cdots (x - \bar{\lambda}_t)$$

mit $\lambda_j = \cos\varphi_j + i \sin\varphi_j$ $(0 < \varphi_j < 2\pi)$, so gilt für den orthogonalen Operator U^k

$$f_{U^k}(x) = (-1)^n \cdot (x-1)^{s_1} \cdot (x+1)^{s_2} \cdot (x - \lambda_1^{(k)}) \cdots (x - \lambda_t^{(k)}) \cdot (x - \bar{\lambda}_1^{(k)}) \cdots (x - \bar{\lambda}_t^{(k)})$$

mit $\lambda_j^{(k)} = \cos k\varphi_j + i \sin k\varphi_j$ $(0 < \varphi_j < 2\pi)$, falls $k \neq 0$ eine ungerade ganze Zahl ist. Ist k eine gerade ganze Zahl, oder gleich Null, so gilt

$$f_{U^k}(x) = (-1)^n \cdot (x-1)^{s_1+s_2} \cdot (x - \lambda_1^{(k)}) \cdots (x - \lambda_t^{(k)}) \cdot (x - \bar{\lambda}_1^{(k)}) \cdots (x - \bar{\lambda}_t^{(k)}),$$

und es ist $\lambda_j^{(k)} = \cos k\varphi_j + i \sin k\varphi_j$ $(0 < \varphi_j < 2\pi)$.

6. Sind A_1 und A_2 miteinander vertauschbare $(A_1A_2 = A_2A_1)$ symmetrische Operatoren auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so besitzen sie ein gemeinsames vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren, und für die Normalform des Operators $A_1 + A_2$ gilt

$$(A_1 + A_2)^{(\mathfrak{n})} = A_1^{(\mathfrak{n})} + A_2^{(\mathfrak{n})}.$$

7. Sind A_1 und A_2 miteinander vertauschbare symmetrische n-reihige Matrizen, so gibt es eine orthogonale Matrix U, so daß

$$A_1^{(\mathfrak{n})} = U^{\mathsf{T}} \cdot A_1 \cdot U \quad \text{und} \quad A_2^{(\mathfrak{n})} = U^{\mathsf{T}} \cdot A_2 \cdot U$$

gilt.

8.* Jede symmetrische Matrix ist eine Matrix einfacher Struktur (vgl. § 11, Nr. 8, Aufgabe 6).

§ 20. QUADRATISCHE FORMEN AUF EUKLIDISCHEN VEKTORRÄUMEN

1. EINLEITUNG

Die im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Sätze über die Normalform symmetrischer Operatoren auf einem euklidischen Vektorraum werden benutzt, um eine entsprechende Normalform für quadratische Formen anzugeben. Der Leser erinnere sich der Ergebnisse von § 14, Nr. 2 und 3 über quadratische Formen in einem beliebigen Vektorraum, die z. T. für die derzeitigen Betrachtungen herangezogen werden.

2. QUADRATISCHE FORMEN UND SYMMETRISCHE OPERATOREN

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und q eine quadratische Form auf dem Vektorraum V. Der gegebenen quadratischen Form q entspricht eine symmetrische Bilinearform f auf dem Vektorraum V, so daß

$$q(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}), \quad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$$

für alle $x, y \in V$ gilt. In § 18, Nr. 2, Satz I haben wir bewiesen, daß jede Bilinearform f auf einem euklidischen Vektorraum V durch einen linearen Operator $A \in \mathscr{A}(V)$ in der Form

$$f(x, y) = (Ax, y) \quad (x, y \in V) \tag{1}$$

gegeben wird. Die runden Klammern bezeichnen wie üblich das Skalarprodukt im euklidischen Vektorraum V. Ist $f(x, y)$ eine symmetrische Bilinearform, so gilt

$$(Ax, y) = f(x, y) = f(y, x) = (Ay, x),$$

und A ist ein symmetrischer linearer Operator auf dem euklidischen Vektorraum V.

Ist umgekehrt $A \in \mathscr{A}(V)$ ein symmetrischer Operator, so wird durch die Gleichung (1) eine symmetrische Bilinearform f und folglich eine quadratische Form q definiert, für die

$$q(x) = (Ax, x) \quad \text{für alle} \quad x \in V$$

gilt. Wir erhalten den Satz

I. *Zwischen den quadratischen Formen q und den symmetrischen Operatoren A auf einem euklidischen Vektorraum V besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung, die durch die Gleichung*

$$q(x) = (Ax, x) \quad \textit{für alle} \quad x \in V \tag{2}$$

beschrieben wird.

Einen symmetrischen Operator A auf einem euklidischen Vektorraum V nennt man *positiv* bzw. *negativ definit, positiv* bzw. *negativ semidefinit* oder *indefinit*, wenn die ihm durch (2) zugeordnete quadratische Form q die entsprechende Eigenschaft besitzt.

3. HAUPTACHSENTRANSFORMATION UND METRISCHE NORMALFORM

Es sei $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V. Wir betrachten eine quadratische Form q und den ihr entsprechenden symmetrischen Operator A. Ist $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$, so folgt aus (2)

$$q(x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i, \tag{3}$$

und die symmetrische Koeffizientenmatrix $A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n}$ der quadratischen Form q ist die dem symmetrischen Operator A bezüglich $\mathfrak{B}_0$ entsprechende Matrix

$$A = \|\alpha_{i'i}\|_{n,n} = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(A). \tag{4}$$

Es ist nämlich

$$q(x) = (Ax, x) = \sum_{i'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (Ax_{i'}, x_i) \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i$$

und

$$\alpha_{ii'} = (Ax_{i'}, x_i) = (x_{i'}, Ax_i) = \alpha_{i'i}.$$

Wir betrachten nun eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \left\{ \overset{(\lambda_1)}{x_1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x_n} \right\}$ des euklidischen Vektorraumes V, die aus Eigenvektoren des Operators A besteht. Dem symmetrischen Operator A entspricht in bezug auf diese Basis die Normalform $A^{(n)}$ (vgl. § 19, Nr. 3, Satz V), und wir erhalten

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_1 \cdot \eta_{\mu_1}^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_{\mu_1 + \cdots + \mu_{m-1} + 1}^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2,$$

wenn $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die Koordinaten des Vektors x in bezug auf die Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ bezeichnen.

II. *Ist q eine quadratische Form auf dem euklidischen Vektorraum V, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ von V, so daß $q(x)$ in der Form*

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2 \tag{5}$$

darstellbar ist. Die Koeffizienten der Quadrate in der Darstellung (5) *sind die Eigenwerte des q entsprechenden symmetrischen Operators A. Die Basis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ besteht aus Eigenvektoren des Operators A.*

Die Darstellung (5) der quadratischen Form q nennt man die *metrische Normalform der uadratischen Form q.*

Die Vektoren $\overset{(\lambda_1)}{x_1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x_n}$ der Basis $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ heißen die *Hauptachsen der quadratischen Form q.*

Aus den Gleichungen

$$\overset{(\lambda_i)}{x_j} = \sum_{j'=1}^{n} v_{j'j} x_{j'} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

folgen die Transformationsgleichungen

$$\xi_{j'} = \sum_{j=1}^{n} v_{j'j} \cdot \eta_j \quad \text{und} \quad \eta_{j'} = \sum_{j=1}^{n} v_{jj'} \cdot \xi_j \quad (j' = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

(vgl. § 18, Nr. 4, Formel (24)), und $U = \|v_{j'j}\|_{n,n}$ ist eine orthogonale Matrix.

Durch die Gleichungen (6) wird die quadratische Form q mit Hilfe der orthogonalen Transformationsmatrix U aus der Darstellung (3) in die metrische Normalform (5) überführt. Dieser Prozeß heißt die *Hauptachsentransformation der quadratischen Form q.*

1⁰. Die Bezeichnung „Hauptachsentransformation" erklärt sich aus der folgenden geometrischen Veranschaulichung.

Wir betrachten die Ebene und den zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathfrak{V}^{(2)}$ der Translationen. Die Vektoren einer Orthonormalbasis $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\}$ von $\mathfrak{V}^{(2)}$ repräsentieren wir durch zwei in einem festen Punkt O angetragene gerichtete Strecken $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$. Dann erhalten wir in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem, und jedem Vektor $\mathfrak{x} = \xi_1\mathfrak{x}_1 + \xi_2\mathfrak{x}_2$ entspricht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, deren Endpunkt P die kartesischen Koordinaten ξ_1, ξ_2 besitzt. Es sei q eine quadratische Form auf dem Vektorraum $\mathfrak{V}^{(2)}$, und es sei

$$q(\mathfrak{x}) = \alpha_{11} \cdot \xi_1^2 + 2 \cdot \alpha_{12} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \alpha_{22} \cdot \xi_2^2$$

die Darstellung von q bezüglich der gegebenen Basis. Die Punkte P der Ebene, deren kartesische Koordinaten ξ_1, ξ_2 der Gleichung

$$\alpha_{11} \cdot \xi_1^2 + 2 \cdot \alpha_{12} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \alpha_{22} \cdot \xi_2^2 = 1$$

genügen, bilden einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt O des kartesischen Koordinatensystems liegt.

Die orthogonale Matrix U beschreibt eine Drehung (Drehspiegelung) der Ebene um den Punkt O, bei der die Achsen $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ des ursprünglichen kartesischen Koordinatensystems in die Achsen $\overrightarrow{OQ_1}$, $\overrightarrow{OQ_2}$ eines neuen kartesischen Koordinatensystems übergehen. Die neuen Koordinatenachsen repräsentieren dabei die Eigenvektoren $\overset{(\lambda_1)}{\mathfrak{x}_1}$, $\overset{(\lambda_2)}{\mathfrak{x}_2}$ des symmetrischen Operators A, der der quadratischen Form q entspricht. In bezug auf dieses neue kartesische Koordinatensystem besitzt die Form q die Darstellung

$$q(\mathfrak{x}) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_2 \cdot \eta_2^2,$$

und der Kegelschnitt besteht aus allen Punkten P, deren kartesische Koordinaten η_1, η_2 (in bezug auf das neue kartesische Koordinatensystem) der Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_2 \cdot \eta_2^2 = 1$$

genügen. Das bedeutet aber, daß die neuen Koordinatenachsen $\overrightarrow{OQ_1}$, $\overrightarrow{OQ_2}$ gerade die Hauptachsenrichtungen des Kegelschnittes bezeichnen, und die Eigenwerte λ_1, λ_2 geben die Länge der Hauptachsen an.

2⁰. Als erstes Zahlenbeispiel betrachten wir die quadratische Form q auf dem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathfrak{V}^{(2)}$, die in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\}$ durch

$$q(\mathfrak{x}) = \frac{7}{4} \cdot \xi_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \frac{5}{4} \cdot \xi_2^2$$

gegeben ist. Die zugehörige symmetrische Matrix ist

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{Vmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{4} - x & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} - x \end{vmatrix} = \left(x - \frac{7}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{16} = x^2 - 3 \cdot x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2).$$

Aus den homogenen Gleichungen

$$\frac{3}{4}\cdot\xi_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\xi_2 = 0 \quad\text{und}\quad -\frac{1}{4}\cdot\xi_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\xi_2 = 0$$

erhalten wir die normierten Eigenvektoren

$$\overset{(1)}{\mathfrak{x}_1} = \frac{1}{2}\mathfrak{x}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{x}_2, \quad \overset{(2)}{\mathfrak{x}_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{x}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{x}_2$$

und für $\mathfrak{x} = \xi_1\mathfrak{x}_1 + \xi_2\mathfrak{x}_2 = \eta_1\overset{(1)}{\mathfrak{x}_1} + \eta_2\overset{(2)}{\mathfrak{x}_2}$

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\cdot\eta_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta_2, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta_1 + \frac{1}{2}\cdot\eta_2.$$

Die metrische Normalform lautet

$$q(\mathfrak{x}) = \eta_1^2 + 2\cdot\eta_2^2.$$

Repräsentieren wir die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ durch $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ und die Vektoren $\overset{(1)}{\mathfrak{x}_1}, \overset{(2)}{\mathfrak{x}_2}$ durch $\overrightarrow{OQ_1}, \overrightarrow{OQ_2}$, so erhalten wir das neue kartesische Koordinatensystem aus dem alten durch eine Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ oder $\varphi = 60°$. Die quadratische Form $\frac{7}{4}\cdot\xi_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\xi_1\cdot\xi_2 + \frac{5}{4}\cdot\xi_2^2 = \eta_1^2 + 2\cdot\eta_2^2$ wird durch eine Ellipse mit den Hauptachsenrichtungen $\overrightarrow{OQ_1}, \overrightarrow{OQ_2}$ repräsentiert. Die Länge der Hauptachsen beträgt 1 bzw. 2 (vgl. Abb. 14).

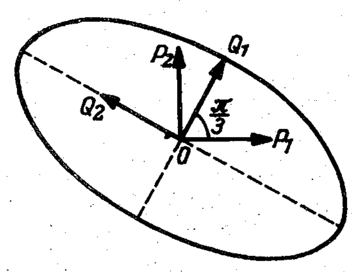


Abb. 14

3°. Als zweites Zahlenbeispiel erinnern wir an § 19, Nr. 3, 1°. Dem dort betrachteten symmetrischen Operator A entspricht eine quadratische Form q auf dem vierdimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(4)}$, die bezüglich der Basis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ die Darstellung

$$q(x) = 2\cdot\xi_1^2 - 6\cdot\xi_1\cdot\xi_2 - 4\cdot\xi_1\cdot\xi_2 + 2\cdot\xi_1\cdot\xi_4 + 2\cdot\xi_2^2 - 4\cdot\xi_2\cdot\xi_3 - 2\cdot\xi_2\cdot\xi_4 + \xi_3^2 + 4\cdot\xi_4^2$$

besitzt. Setzen wir

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_3,\\
\xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\eta_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\eta_3,\\
\xi_3 &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\eta_2 \qquad\qquad + \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\eta_4,\\
\xi_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_2 \qquad\qquad + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\eta_4
\end{aligned}$$

so erhalten wir für die quadratische Form q die metrische Normalform

$$q(x) = -3 \cdot \eta_1^2 + 3 \cdot \eta_2^2 + 3 \cdot \eta_3^2 + 6 \cdot \eta_4^2.$$

Die Form q und der lineare Operator A sind indefinit.

Aus der metrischen Normalform (5) der quadratischen Form q folgt der Satz

III. *Ein symmetrischer Operator A ist dann und nur dann positiv (bzw. negativ) definit, wenn seine Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind.*

Ein symmetrischer Operator A ist dann und nur dann positiv (bzw. negativ) semidefinit, wenn seine Eigenwerte nicht negativ (bzw. nicht positiv) sind.

4. CHARAKTERISIERUNG DER EIGENWERTE DURCH EXTREMALPRINZIPIEN

Ist V der n-dimensionale euklidische Vektorraum, so führt die Frage nach den Eigenwerten eines symmetrischen Operators A auf das im allgemeinen sehr schwierige Problem der Berechnung der Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades. Wir wollen daher die Eigenwerte eines symmetrischen Operators oder, was dasselbe ist, die Koeffizienten in der metrischen Normalform einer quadratischen Form noch auf eine andere Weise charakterisieren. Gleichzeitig erhalten wir ein neues Verfahren zur Durchführung der Hauptachsentransformation für eine gegebene quadratische Form.

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, q eine gegebene quadratische Form und A der ihr entsprechende symmetrische Operator. Wir betrachten die folgende reellwertige Funktion auf dem Vektorraum V:

$$\varphi_q(x) = \frac{q(x)}{|x|^2} \quad (x \in V, x \neq o). \tag{7}$$

Ist $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \{\overset{(\lambda_1)}{x_1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x_n}\}$ eine Orthonormalbasis von V, in bezug auf die die quadratische Form q die metrische Normalform besitzt, so erhalten wir für den Vektor $x = \eta_1 \overset{(\lambda_1)}{x_1} + \cdots + \eta_n \overset{(\lambda_m)}{x_n}$

$$\varphi_q(x) = \frac{\lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2}{\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2}. \tag{8}$$

Nehmen wir an, daß die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des symmetrischen Operators A nach der Größe geordnet sind, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$, so ist

$$\lambda_1 \cdot (\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2) \leqq \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2 \leqq \lambda_m \cdot (\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2),$$

und aus diesen Ungleichungen folgt für $\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2 \neq 0$

$$\lambda_1 \leqq \frac{\lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2}{\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2} \leqq \lambda_m. \tag{9}$$

Für $\boldsymbol{x} = \overset{(\lambda_1)}{\boldsymbol{x}_1}$ ist aber $\eta_1 = 1, \eta_2 = \cdots = \eta_n = 0$ und $\lambda_1 = \varphi_q\left(\overset{(\lambda_1)}{\boldsymbol{x}_1}\right)$; für $\boldsymbol{x} = \overset{(\lambda_m)}{\boldsymbol{x}_n}$ gilt entsprechend $\eta_n = 1, \eta_1 = \cdots = \eta_{n-1} = 0$ und $\lambda_m = \varphi_q\left(\overset{(\lambda_m)}{\boldsymbol{x}_n}\right)$. Hieraus und aus

$$\lambda_1 \leqq \varphi_q(\boldsymbol{x}) \leqq \lambda_m \quad (\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}) \tag{9'}$$

erhalten wir den Satz

IV. *Der kleinste bzw. größte Eigenwert des symmetrischen Operators A ist das Minimum bzw. das Maximum der reellwertigen Funktion $\varphi_q(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o})$ auf dem euklidischen Vektorraum V:*

$$\lambda_1 = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \varphi_q(\boldsymbol{x}), \quad \lambda_m = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \varphi_q(\boldsymbol{x}).$$

Bezeichnen wir mit K_1 die Menge aller Vektoren der Norm 1 aus dem Vektorraum V, so gilt für die Vektoren $\boldsymbol{x} \in K_1$

$$\varphi_q(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}) \quad (|\boldsymbol{x}| = 1),$$

und da $\left|\overset{(\lambda_1)}{\boldsymbol{x}_1}\right| = \left|\overset{(\lambda_m)}{\boldsymbol{x}_n}\right| = 1$ ist, erhalten wir:

IV′. *Der kleinste bzw. größte Eigenwert des symmetrischen Operators A ist das Minimum bzw. das Maximum der zugehörigen quadratischen Form q auf der Menge K_1 der Vektoren mit der Norm* 1:

$$\lambda_1 = \min_{\boldsymbol{x} \in K_1} q(\boldsymbol{x}), \quad \lambda_m = \max_{\boldsymbol{x} \in K_1} q(\boldsymbol{x}).$$

Durch die Sätze IV und IV′ haben wir eine Charakterisierung des kleinsten und des größten Eigenwertes als Minimum bzw. Maximum einer geeignet definierten reellwertigen Funktion auf dem euklidischen Vektorraum V gewonnen. Es erhebt sich die Frage, ob sich auch die anderen Eigenwerte in ähnlicher Weise charakterisieren lassen.

Ist $W(\lambda_1)$ der zum Eigenwert λ_1 gehörende Eigenraum und ist $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\mu_1}\}$ eine Orthonormalbasis von $W(\lambda_1)$, so ergänzen wir diese zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ des Vektorraumes V und betrachten den von den ergänzenden Vektoren erzeugten Teilraum

$$W'(\lambda_1) = L(\{\boldsymbol{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}).$$

Die Teilräume $W(\lambda_1)$ und $W'(\lambda_1)$ sind orthogonal, und $W'(\lambda_1)$ besteht aus allen zu den Vektoren aus $W(\lambda_1)$ orthogonalen Vektoren von V.[1]

Wir betrachten die Funktion $\varphi_q(\boldsymbol{x})$ als Funktion auf dem Teilraum $W'(\lambda_1)$. Ist $\mathfrak{B}_0^{(n)}$ die schon weiter oben genannte Orthonormalbasis, in bezug auf die die quadra-

---

[1]) * $W'(\lambda_1)$ ist das orthogonale Komplement zum Eigenraum $W(\lambda_1)$. *

tische Form q die metrische Normalform besitzt, so ist $\{\overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $W'(\lambda_1)$. Diese Vektoren sind nämlich zu den Vektoren aus $W(\lambda_1)$ orthogonal, und da $W'(\lambda_1)$ aus allen zu den Vektoren aus $W(\lambda_1)$ orthogonalen Vektoren aus V besteht, gehören die Vektoren $\overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x}_n$ zu $W'(\lambda_1)$. Überdies sind diese Vektoren paarweise orthogonal und normiert, also linear unabhängig, und da $\dim W'(\lambda_1) = n - \mu_1$ ist, bilden die Vektoren $\overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x}_n$ eine Orthonormalbasis von $W'(\lambda_1)$. Ist $x = \eta_{\mu_1+1}\overset{(\lambda_2)}{x}_{\mu_1+1} + \cdots + \eta_n\overset{(\lambda_m)}{x}_n$ ein beliebiger, von o verschiedener Vektor aus $W'(\lambda_1)$, so gilt

$$\varphi_q(x) = \frac{\lambda_2 \cdot \eta_{\mu_1+1} + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2}{\eta_{\mu_1+1}^2 + \cdots + \eta_n^2},$$

und wie oben folgt

$$\lambda_2 = \min_{x \neq o} \varphi_q(x) \quad (x \in W'(\lambda_1)).$$

Ist entsprechend $W'(\lambda_m)$ der Teilraum aller zu den Vektoren des Eigenraumes $W(\lambda_m)$ orthogonalen Vektoren aus V[1]), so ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie oben

$$\lambda_{m-1} = \max_{x \neq o} \varphi_q(x) \quad (x \in W'(\lambda_m)).$$

V. *Sind* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{m-1} < \lambda_m$ *die verschiedenen Eigenwerte des symmetrischen Operators* A, *so erhalten wir die Eigenwerte* λ_2 *bzw.* λ_{m-1} *als das Minimum bzw. Maximum der Funktion* $\varphi_q(x)$ $(x \neq o)$ *auf den Teilräumen* $W'(\lambda_1)$ *bzw.* $W'(\lambda_m)$:

$$\lambda_2 = \min_{\substack{x \in W'(\lambda_1) \\ x \neq o}} \varphi_q(x), \quad \lambda_{m-1} = \max_{\substack{x \in W'(\lambda_m) \\ x \neq o}} \varphi_q(x).$$

Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Vektoren mit der Norm 1, so können wir die Menge der normierten Vektoren aus $W'(\lambda_1)$ bzw. $W'(\lambda_m)$ mit $K_1 \cap W'(\lambda_1)$ bzw. $K_1 \cap W'(\lambda_m)$ bezeichnen und erhalten:

V'. *Sind* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{m-1} < \lambda_m$ *die verschiedenen Eigenwerte des symmetrischen Operators* A, *so erhalten wir die Eigenwerte* λ_2 *bzw.* λ_{m-1} *als das Minimum bzw. Maximum der zugehörigen quadratischen Form* q *auf den Mengen* $K_1 \cap W'(\lambda_1)$ *bzw.* $K_1 \cap W'(\lambda_m)$ *der normierten, zu allen Eigenvektoren zum Eigenwert* λ_1 *bzw.* λ_m *orthogonalen Vektoren aus* V:

$$\lambda_2 = \min_{x \in K_1 \cap W'(\lambda_1)} q(x), \quad \lambda_{m-1} = \max_{x \in K_1 \cap W'(\lambda_m)} q(x).$$

---

[1]) * $W'(\lambda_m)$ ist das orthogonale Komplement zum Eigenraum $W(\lambda_m)$. *

Wählen wir nun eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{\mu_1}$ und $\boldsymbol{x}_{\mu_1+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\mu_1+\mu_2}$ in den Eigenräumen $W(\lambda_1)$ und $W(\lambda_2)$ und ergänzen dieses Orthonormalsystem durch $\boldsymbol{x}_{\mu_1+\mu_2+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ zu einer Orthonormalbasis von V, so ist

$$W'(\lambda_1, \lambda_2) = L(\{\boldsymbol{x}_{\mu_1+\mu_2+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$$

ein zu $W(\lambda_1)$ und $W(\lambda_2)$ orthogonaler Teilraum von V, der aus allen zu den Vektoren aus $W(\lambda_1)$ und zu den Vektoren aus $W(\lambda_2)$ orthogonalen Vektoren von V besteht.[1])

Entsprechende Überlegungen wie oben ergeben die Gleichungen

$$\lambda_3 = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \varphi_q(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in W'(\lambda_1, \lambda_2))$$

oder

$$\lambda_3 = \min q(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in K_1 \cap W'(\lambda_1, \lambda_2)).$$

Definieren wir den Teilraum $W'(\lambda_m, \lambda_{m-1})$ entsprechend, so erhalten wir

$$\lambda_{m-2} = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \varphi_q(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in W'(\lambda_m, \lambda_{m-1}))$$

oder

$$\lambda_{m-2} = \max q(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in K_1 \cap W'(\lambda_m, \lambda_{m-1})).$$

VI. *Sind $\lambda_1 < \cdots < \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte des symmetrischen Operators A und sind $W'(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$ bzw. $W'(\lambda_m, \ldots, \lambda_{m-i})$ diejenigen Teilräume des euklidischen Vektorraumes V, die aus allen zu den Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ bzw. $\lambda_m, \ldots, \lambda_{m-i}$ orthogonalen Vektoren von V bestehen, so gilt*

$$\lambda_{i+1} = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \in W'(\lambda_1, \ldots, \lambda_i) \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}}} \varphi_q(\boldsymbol{x}), \quad \lambda_{m-i-1} = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \in W'(\lambda_m, \ldots, \lambda_{m-i}) \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}}} \varphi_q(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

oder

$$\lambda_{i+1} = \min_{\boldsymbol{x} \in K_1 \cap W'(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)} q(\boldsymbol{x}), \quad \lambda_{m-i-1} = \max_{\boldsymbol{x} \in K_1 \cap W'(\lambda_m, \ldots, \lambda_{m-i})} q(\boldsymbol{x}). \tag{11}$$

5. EINE METHODE ZUR DURCHFÜHRUNG DER HAUPTACHSENTRANSFORMATION

Aus der im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Charakterisierung der Eigenwerte einer quadratischen Form q gewinnen wir ein Verfahren zur Durchführung der Hauptachsentransformation.

Wir wählen einen normierten Vektor $\boldsymbol{y}_1 \in V$, so daß die gegebene Form $q(\boldsymbol{x})$ ihr Minimum annimmt. Dann ist $q(\boldsymbol{y}_1) = \lambda_1$. Ergänzen wir den Vektor $\boldsymbol{y}_1$ zu einer Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ von V und berechnen $q(\boldsymbol{x})$ für den Vektor

---

[1]) * $W'(\lambda_1, \lambda_2)$ ist das orthogonale Komplement zu $W(\lambda_1) \dotplus W(\lambda_2)$. *

$x = \eta_1 y_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$, so erhalten wir

$$q(x) = \alpha_{11} \cdot \eta_1^2 + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1i} \cdot \eta_1 \cdot \xi_i + \sum_{i'=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i .$$

Für $x = y_1$ gilt $q(y_1) = \alpha_{11} = \lambda_1$.

Ist $z_j = \cos \varphi y_1 + \sin \varphi x_j$ $(2 \leqq j \leqq n)$, so ist $|z_j| = 1$ und

$$q(z_j) = \lambda_1 \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot \alpha_{1j} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \alpha_{jj} \cdot \sin^2 \varphi .$$

Für die Differenz $q(z_j) - q(y_1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} q(z_j) - q(y_1) &= \lambda_1 \cdot (\cos^2 \varphi - 1) + 2 \cdot \alpha_{1j} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \alpha_{jj} \cdot \sin^2 \varphi \\ &= -(\lambda_1 - \alpha_{jj}) \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \alpha_{1j} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi . \end{aligned}$$

Ist $\alpha_{1j} \neq 0$, so gibt es stets einen Winkel φ $(0 < \varphi < \pi)$, so daß

$$\cot \varphi > \frac{\lambda_1 - \alpha_{jj}}{2 \cdot \alpha_{1j}} \quad \text{bzw.} \quad \cot \varphi < \frac{\lambda_1 - \alpha_{jj}}{2 \cdot \alpha_{1j}}$$

ist, je nachdem, ob $\alpha_{1j} < 0$ oder $\alpha_{1j} > 0$ gilt. Es ist aber $\sin^2 \varphi > 0$ und $-(\lambda_1 - \alpha_{jj}) + 2 \cdot \alpha_{1j} \cdot \cot \varphi < 0$. Folglich ist

$$\sin^2 \varphi \cdot (\lambda_1 + \alpha_{jj} + 2 \cdot \alpha_{1j} \cdot \cot \varphi) = q(z_j) - q(y_1) < 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Form q als Funktion auf der Menge K_1 der normierten Vektoren ihr Minimum für $x = y_1$ annimmt. Für $j = 2, \ldots, n$ gilt also

$$\alpha_{1j} = 0$$

und damit

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \sum_{i'=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i . \tag{12}$$

Die Koeffizientenmatrix A der Form q in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_0$ hat die Gestalt

$$A = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| .$$

Ist $\boldsymbol{A}$ der symmetrische Operator, der der Form q entspricht, so gilt $A = \Phi_{\mathfrak{B}_0}(\boldsymbol{A})$, und folglich ist

$$\boldsymbol{A} y_1 = \lambda_1 y_1 ,$$

d. h., y_1 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1: $y_1 = \overset{(\lambda_1)}{x_1}$. Wir betrachten nun den Teilraum $W_1 = L(\{x_2, \ldots, x_n\})$ und die durch

$$q_1(x) = \sum_{i'=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i'i} \cdot \xi_{i'} \cdot \xi_i = q(x)$$

für $x = \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n \in W_1$ auf diesem Teilraum definierte quadratische Form q_1. Ist $y_2 \in W_1$ ein normierter Vektor, für den die Form q_1 ihr Minimum annimmt, so gilt $q_1(y_2) = \lambda_1$ oder $q_1(y_2) = \lambda_2$, je nachdem, ob $\dim W(\lambda_1) > 1$ ist oder $\dim W(\lambda_1) = 1$.

Bezeichnen wir $q_1(y_2) = \min\limits_{K_1 \cap W_1} q_1(x)$ zunächst mit λ, so erhalten wir wie oben

$$q_1(x) = \lambda \cdot \eta_2^2 + \sum_{i'=3}^{n} \sum_{i=3}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_{i'} \cdot \xi'_i,$$

wenn wir y_2 durch $x'_3, \ldots, x'_n$ zu einer Orthonormalbasis von W_1 ergänzen und $x = \eta_2 y_2 + \xi'_3 x'_3 + \cdots + \xi'_n x'_n$ setzen. Die Vektoren $y_1, y_2, x'_3, \ldots, x'_n$ bilden dann eine Orthonormalbasis von V, und für $x \in V$,

$$x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \xi'_3 x'_3 + \cdots + \xi'_n x'_n,$$

erhalten wir

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda \cdot \eta_2^2 + \sum_{i'=3}^{n} \sum_{i=3}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_{i'} \cdot \xi'_i. \tag{13}$$

Daraus folgt

$$A y_2 = \lambda y_2,$$

und $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist ein Eigenwert des Operators A, y_2 ist Eigenvektor zum Eigenwert λ. Ist $\dim W(\lambda_1) > 1$, so gibt es einen zu y_1 orthogonalen normierten Eigenvektor z zum Eigenwert λ_1, und es ist

$$q(z) = \lambda_1 \leqq q(x) \quad (x \in V, |x| = 1).$$

Insbesondere gilt also für alle $x \in W_1$, $|x| = 1$

$$\lambda_1 \leqq q(x) = q_1(x).$$

Da $(z, y_1) = 0$ ist, ist überdies $z \in W_1$, woraus

$$\lambda_1 = \min_{K_1 \cap W_1} q_1(x) = \lambda$$

folgt. Ist $\dim W(\lambda_1) = 1$, so ist $W'(\lambda_1) = W_1$ und

$$\lambda = \min_{K_1 \cap W_1} q_1(x) = \min_{K_1 \cap W'(\lambda_1)} q(x) = \lambda_2.$$

Aus der Gleichung (13) folgt also

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_1 \cdot \eta_2^2 + \sum_{i'=3}^{n} \sum_{i=3}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_{i'} \cdot \xi'_i, \quad \text{wenn} \quad \dim W(\lambda_1) > 1,$$

und

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_2 \cdot \eta_2^2 + \sum_{i'=3}^{n} \sum_{i=3}^{n} \alpha'_{i'i} \cdot \xi'_{i'} \cdot \xi'_i, \quad \text{wenn} \quad \dim W(\lambda_1) = 1$$

ist. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \left\{ \overset{(\lambda_1)}{x_1}, \ldots, \overset{(\lambda_m)}{x_n} \right\}$ des euklidischen Vektorraumes V, die aus Eigenvektoren des symmetrischen Operators A besteht, sowie die metrische Normalform

$$q(x) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \cdots + \lambda_m \cdot \eta_n^2$$

der gegebenen quadratischen Form.

4⁰. Wir betrachten die aus dem Beispiel 2⁰ bekannte quadratische Form q, die als quadratische Form auf dem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum $V^{(2)}$ in bezug auf eine feste Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, x_2\}$ die Darstellung

$$q(x) = \frac{7}{4} \cdot \xi_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \frac{5}{4} \cdot \xi_2^2$$

besitzt. Dabei sind ξ_1, ξ_2 die Koordinaten des Vektors x in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_0$. Es ist

$$\varphi_q(x) = \frac{\frac{7}{4} \cdot \xi_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \frac{5}{4} \cdot \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Durchläuft x alle von o verschiedenen Vektoren aus $V^{(2)}$, so durchlaufen seine Koordinaten ξ_1, ξ_2 alle Paare reeller Zahlen, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist. Die Funktion $\varphi_q(x)$ können wir als eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen ξ_1, ξ_2 auffassen:

$$\varphi_q(x) = \varphi_q(\xi_1, \xi_2).$$

Wir suchen die Extremwerte der Funktion $\varphi_q(\xi_1, \xi_2)$; diese Extremwerte sind die Eigenwerte des zu q gehörenden symmetrischen Operators A.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung der Argumente $\xi_1, \xi_2 \neq 0$, so können wir die Funktion $\varphi_q(\xi_1, \xi_2)$ durch die Funktion

$$\varphi(\xi) = \frac{\frac{7}{4} \cdot \xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \xi + \frac{5}{4}}{\xi^2 + 1}$$

ersetzen, wenn wir $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ annehmen. Besitzt die Funktion $\varphi_q(\xi_1, \xi_2)$ für das Argument $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \neq 0$ ein Extremum, so ist $\varphi(\xi^{(0)})$ mit $\xi^{(0)} = \frac{\xi_1^{(0)}}{\xi_2^{(0)}}$ ein Extremwert der Funktion φ. Ist umgekehrt $\varphi(\xi^{(0)})$ ein Extremwert der Funktion φ und ist $\varphi_q(\xi_1, 0) \leqq \varphi_q(\xi^{(0)}, 1)$ oder $\varphi_q(\xi_1, 0) \geqq \varphi_q(\xi^{(0)}, 1)$, je nachdem, ob $\varphi(\xi^{(0)})$ ein Maximum oder Minimum der Funktion φ ist, so besitzt die Funktion φ_q für die Argumente $\xi_1^{(0)} = \xi^{(0)} \cdot \xi_2^{(0)}, \xi_2^{(0)} \neq 0$ ein Extremum mit dem Wert

$$\varphi_q(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) = \varphi_q(\xi^{(0)}, 1) = \varphi(\xi^{(0)}).$$

Um die Extremwerte der rationalen Funktion $\varphi(\xi)$ zu bestimmen, berechnen wir ihre Ableitungen

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{2 \cdot (\xi^2 + 1)^2} \left(\sqrt{3} \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi - \sqrt{3}\right),$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{-1}{(\xi^2 + 1)^3} \left(\sqrt{3} \cdot \xi^3 + 3 \cdot \xi^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \xi - 1\right).$$

Aus der Gleichung

$$\sqrt{3}\cdot\xi^2 + 2\cdot\xi - \sqrt{3} = (\sqrt{3}\cdot\xi - 1)\cdot(\xi + \sqrt{3})$$

ergeben sich die Nullstellen der Funktion $\varphi'(\xi)$ zu

$$\xi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi^{(2)} = -\sqrt{3},$$

und da

$$\varphi''(\xi^{(1)}) = \frac{9}{8}, \quad \varphi''(\xi^{(2)}) = -\frac{1}{8}$$

ist, erhalten wir ein Minimum der Funktion φ für $\xi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und ein Maximum für $\xi^{(2)} = -\sqrt{3}$. Es ist

$$\varphi(\xi^{(1)}) = 1, \quad \varphi(\xi^{(2)}) = 2,$$

und da

$$\varphi_q(\xi_1, 0) = \frac{7}{4}$$

ist, gilt

$$1 = \varphi(\xi^{(1)}) < \varphi_q(\xi_1, 0) = \frac{7}{4} < \varphi(\xi^{(2)}) = 2.$$

Die Funktion $\varphi_q(\xi_1, \xi_2)$ besitzt ein Minimum vom Wert 1 für die Argumente $\xi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(1)} \neq 0$ und ein Maximum für die Argumente $\xi_1^{(2)} = -\sqrt{3}\cdot\xi_2^{(2)}$, $\xi_2^{(2)} \neq 0$. Setzen wir $\xi_2^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\xi_2^{(2)} = \frac{1}{2}$, so folgt

$$\xi_1^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad \xi_2^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad (\xi_1^{(1)})^2 + (\xi_2^{(1)})^2 = 1$$

sowie

$$\xi_1^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \xi_2^{(2)} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad (\xi_1^{(2)})^2 + (\xi_2^{(2)})^2 = 1.$$

Die Vektoren

$$\overset{(1)}{x} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \quad \text{und} \quad \overset{(2)}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1 bzw. 2 des der Form q zugeordneten symmetrischen Operators $\boldsymbol{A}$, und für

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\cdot\eta_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta_2 \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta_1 + \frac{1}{2}\cdot\eta_2$$

ergibt sich die metrische Normalform

$$q(x) = \eta_1^2 + 2\cdot\eta_2^2.$$

6.* MULTIPLIKATIVE ZERLEGUNG EINES LINEAREN OPERATORS

Zum Abschluß unserer Überlegungen beweisen wir einen Satz über die multiplikative Zerlegung linearer Operatoren in einem euklidischen Vektorraum, der für viele Anwendungen nützlich ist.

VII. *Jeder lineare Operator $B \in \mathscr{A}(V)$ auf einem euklidischen Vektorraum läßt sich in der Form*

$$B = A_1 U_1 \quad bzw. \quad B = U_2 A_2 \tag{14}$$

darstellen. Dabei sind U_1 bzw. U_2 orthogonale und A_1 bzw. A_2 symmetrische Operatoren auf dem euklidischen Vektorraum V.

Wir bemerken zunächst, daß es genügt, die erste der Gleichungen (14) zu beweisen. Betrachten wir diese Gleichung für den zu B adjungierten Operator B^*, so gibt es einen orthogonalen Operator U_0 und einen symmetrischen Operator A_0, so daß $B^* = A_0 U_0$ ist. Durch Übergang zum Adjungierten folgt $B^{**} = B = U_0^* A_0^*$. Da U_0^* mit U_0 orthogonal und $A_0^* = A_0$ ist, gilt die zweite der Gleichungen (14) mit $U_2 = U_0^* = U_0^{-1}$ und $A_2 = A_0$.

Zum Beweis der Gleichung $B = A_1 U_1$ betrachten wir den positiv semidefiniten symmetrischen Operator $C = B^* B$. Es ist $C^* = B^* B^{**} = B^* B = C$ und

$$q(x) = (Cx, x) = (B^* Bx, x) = (Bx, Bx) \geqq 0.$$

Nach Satz III sind die Eigenwerte $\lambda_1^{(C)}, \dots, \lambda_m^{(C)}$ des symmetrischen Operators C nicht negativ: $0 \leqq \lambda_1^{(C)} < \lambda_2^{(C)} < \cdots < \lambda_m^{(C)}$. Wir setzen $\lambda_i^{(C)} = \lambda_i^2$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ und betrachten eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \left\{\overset{(\lambda_1)}{x}_1, \dots, \overset{(\lambda_1)}{x}_{\mu_1}; \dots; \overset{(\lambda_m)}{x}_{\mu_1+\cdots+\mu_{m-1}+1}, \dots, \overset{(\lambda_m)}{x}_{\mu_1+\cdots+\mu_m}\right\}$ $(\mu_1 + \cdots + \mu_m = n)$ des euklidischen Vektorraumes V, die aus Eigenvektoren des Operators C besteht. Es gilt $C\overset{(\lambda_i)}{x}_j = \lambda_i^2 \overset{(\lambda_i)}{x}_j$. Aus den Gleichungen

$$\left(B\overset{(\lambda_i)}{x}_j, B\overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}\right) = \left(B^* B\overset{(\lambda_i)}{x}_j, \overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}\right) = \left(C\overset{(\lambda_i)}{x}_j, \overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}\right) = \lambda_i^2 \cdot \left(\overset{(\lambda_i)}{x}_j, \overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}\right) = \lambda_i^2 \cdot \delta_{jj'}$$

folgt die Orthogonalität der Vektoren $B\overset{(\lambda_i)}{x}_j$ und $B\overset{(\lambda_{i'})}{x}_{j'}$ für $j \neq j'$. Ist B ein regulärer linearer Operator, so ist $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, m$, und die Vektoren $\overset{(\lambda_i)}{z}_j = \dfrac{1}{\lambda_j} B\overset{(\lambda_i)}{x}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von Vektoren aus V. Ist der Operator B nicht regulär, so ist $\lambda_1 = 0$. Wir wählen eine beliebige Orthonormalbasis $\overset{(\lambda_1)}{z}_1, \dots, \overset{(\lambda_1)}{z}_{\mu_1}$ des Eigenraumes $W(0)$ und definieren $\overset{(\lambda_2)}{z}_{\mu_1+1}, \dots, \overset{(\lambda_m)}{z}_n$ wie oben: $\overset{(\lambda_i)}{z}_j = \dfrac{1}{\lambda_i} B\overset{(\lambda_i)}{x}_j$ $(j = \mu_1 + 1, \dots, n)$. Wir erhalten auch in diesem Fall eine Orthonormalbasis $\overset{(\lambda_1)}{z}_1, \dots, \overset{(\lambda_m)}{z}_n$ von V. In jedem Fall gilt nach Konstruktion

$$B\overset{(\lambda_i)}{x}_j = \lambda_i \overset{(\lambda_i)}{z}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Definieren wir die linearen Operatoren U_1 und A_1 durch

$$U_1 \overset{(\lambda_i)}{x_j} = \overset{(\lambda_i)}{z_j}, \quad A_1 \overset{(\lambda_i)}{z_j} = \lambda_i \overset{(\lambda_i)}{z_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

so gilt $B\overset{(\lambda_i)}{x_j} = (A_1 U_1)\overset{(\lambda_i)}{x_j}$ und damit $B = A_1 U_1$. Der Operator U_1 ist orthogonal, da er eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführt, und der Operator A_1 ist offenbar symmetrisch. Damit ist der Satz VII bewiesen.

Wir weisen den Leser darauf hin, daß der symmetrische Operator A_1 eindeutig bestimmt ist, wenn man $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ wählt. A_1 ist dann ein positiv semidefiniter symmetrischer Operator. Ist B regulär, so ist auch der orthogonale Operator U_1 in der Zerlegung $B = A_1 U_1$ eindeutig bestimmt.

5°. Werden die Vektoren eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes durch in einem festen Punkt O angetragene gerichtete Strecken repräsentiert, so bedeutet die angegebene Zerlegung $B = A_1 U_1$, daß jede lineare Abbildung des Raumes in sich, die den Punkt O fest läßt, durch eine Drehspiegelung U_1 (d. h. eine Drehung und darauffolgende Spiegelung an einer Koordinatenebene) und eine Verzerrung (Dilatation) längs der neuen Koordinatenachsen gewonnen werden kann. Die Verzerrungsfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben sich dabei als die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten des symmetrischen Operators B^*B. (Die Eigenwerte sind mit der entsprechenden Vielfachheit anzugeben.)

Durch Auszeichnung einer Orthonormalbasis und Übergang zu den zugeordneten Matrizen erhalten wir aus dem Satz VII:

VIII. *Jede n-reihige quadratische Matrix B läßt sich in der Form*

$$B = A_1 \cdot U_1 \quad \text{bzw.} \quad B = U_2 \cdot A_2 \tag{15}$$

darstellen. Dabei sind U_1 bzw. U_2 orthogonale und A_1 bzw. A_2 symmetrische Matrizen.

7. AUFGABEN

1. Ist $f(x, y)$ eine alternierende Bilinearform auf dem euklidischen Vektorraum V, so ist der durch die Gleichung

$$f(x, y) = (Ax, y) \tag{*}$$

definierte Operator A schiefsymmetrisch. Umgekehrt bestimmt jeder schiefsymmetrische Operator A durch die Gleichung (*) eine alternierende Bilinearform.

2. Ist $f(x, y)$ eine alternierende Bilinearform auf dem n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0^{(n)} = \{x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$, so daß

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{t} \beta_j \cdot (\xi_{s+2\cdot j-1} \cdot \eta_{s+2\cdot j} - \xi_{s+2\cdot j} \cdot \eta_{s+2\cdot j-1})$$

für

$$x = \xi_1 x_1^{(n)} + \cdots + \xi_n x_n^{(n)} \quad \text{und} \quad y = \eta_1 x_1^{(n)} + \cdots + \eta_n x_n^{(n)}$$

gilt.

3.* Jede n-reihige quadratische Matrix B läßt sich in der Form

$$B = U_1 \cdot D \cdot U_2$$

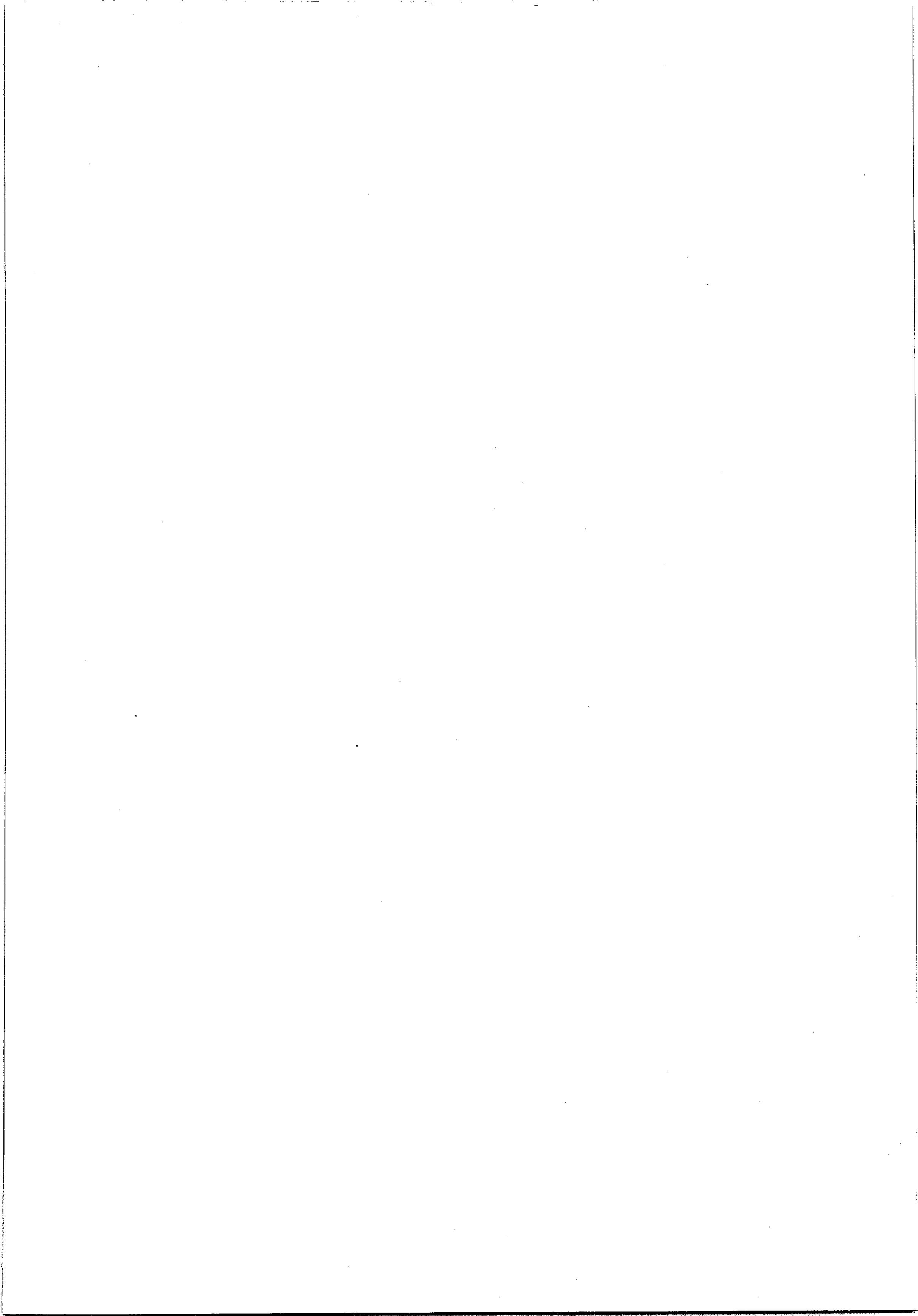
darstellen. Dabei sind U_1, U_2 orthogonale Matrizen, und D ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten der symmetrischen Matrix $B^{\mathsf{T}} \cdot B$ sind.

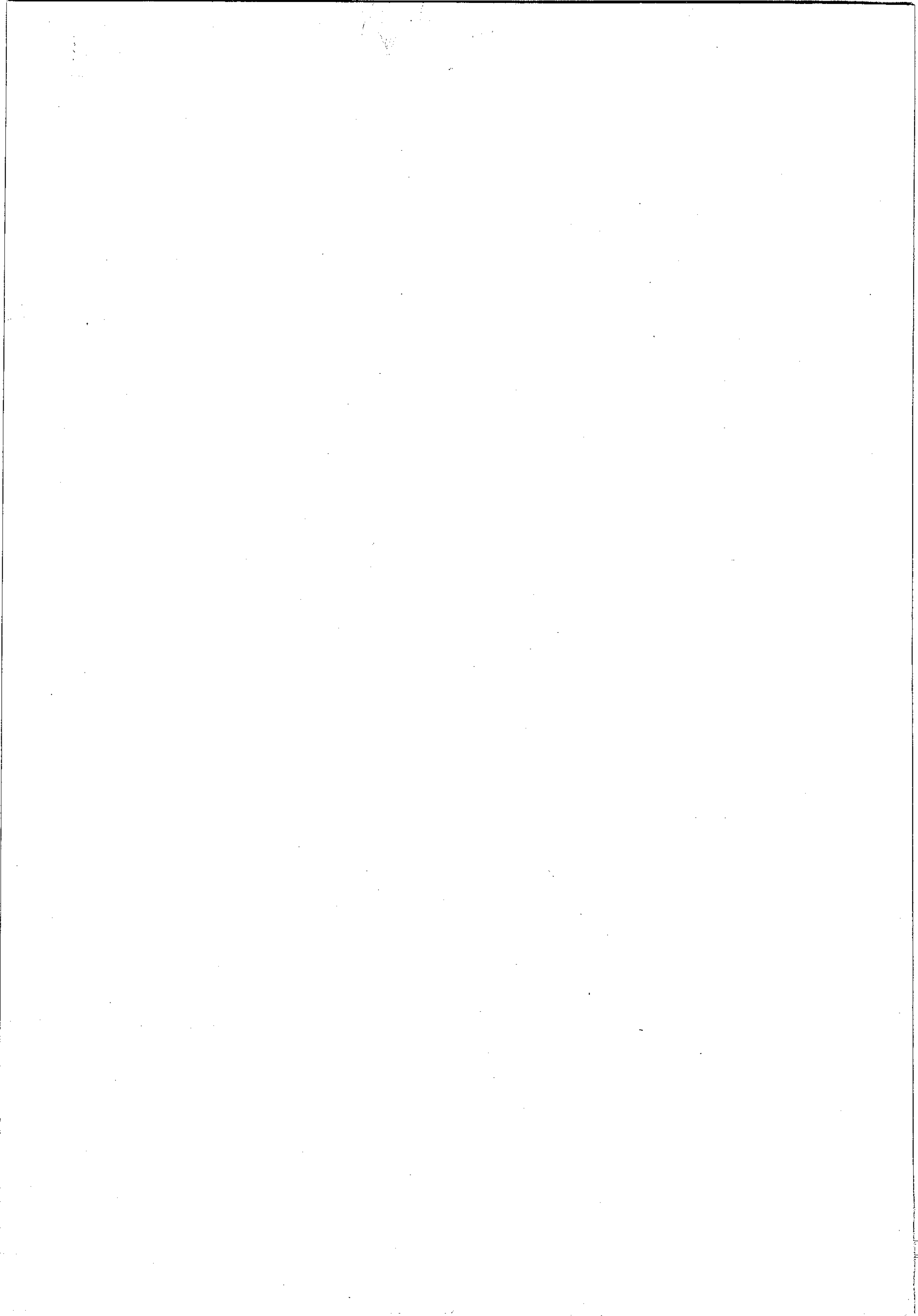
4.* Ist $B \in \mathscr{A}(V, V')$ eine lineare Abbildung des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V in den ebenfalls n-dimensionalen euklidischen Vektorraum V', so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von V und eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}_0' = \{x_1', \ldots, x_n'\}$ von V', so daß

$$Bx_i = \beta_i x_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt.

SACHVERZEICHNIS





H. BOSECK · THEORIE DER LINEAREN VEKTORRÄUME